$\mathbb{N}$: $\quad \operatorname{Inf} \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 0$

Sup $\mathbb{N}$ non esiste poiché $\mathbb{N}$ non è sup. limitato

Per convenzione scriviamo

$$\operatorname{Sup} \mathbb{N} = +\infty$$

(questo permette di dare enunciati omogenei per insiemi limitati $\subset \mathbb{R}$ – e quindi dotati di Sup – e insiemi illimitati superiormente)

$$E = \left\{ \frac{1}{n} \, , \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

$$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$$

Osservo che:

$\forall x \in E \qquad 0 < x \leq 1$ cioè:

E è limitato $\Rightarrow$ ammette Sup e Inf.

$\operatorname{Sup} E = 1 = \max E$ poiché $1 \in E$.

$\operatorname{Inf} E = 0$? (ed è il minimo. Infatti:

0 è un minorante di E!

Ne esiste uno maggiore? Prendo $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$: $0 + \varepsilon$: può essere un minorante di E?

Cioè è vero che $\forall n \quad \varepsilon < \frac{1}{n}$? NO

$\Leftrightarrow n\varepsilon < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ NO propr. archim.

$E = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 \leq 8 \}$

È superiormente limitato? Ad es. è vero che ogni $x \in E$ è minore di $L = 8$?

Sì perché se prendo $x > 8$ si ha anche

$\boxed{x \cdot x > 8 \cdot x}$ (compatibilità : x è >0)

$x \cdot x \cdot x > \boxed{8\, x \cdot x}$ (" ")

$x^3 > \boxed{8 \cdot (8 \cdot x)} > 8 \cdot 8 \cdot 8$ cioè $x^3 > 8^3$ e non $x^3 \leq 8$.

In generale si prova in questo modo che:

$$0 < a < b \implies a^2 < b^3$$

e $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < a < b \implies a^n < b^n$$

Dunque 8 è un maggiorante di E (che risulta dunque limitato): ma gli stessi conti dicono che anche 2 è un maggiorante di E.

2 è pure il più piccolo dei maggioranti di E ($2 - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ non va bene!)

$\Rightarrow \operatorname{Sup} E = 2 = \max E$

L'insieme E è inferiormente limitato?

... l'esperienza dice di no, ma per provarlo dobbiamo mostrare che $\forall L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ esiste un $x \in E$ con

$$x^3 < -L$$

Considero l'eq. $(L > 0)$

$$x^3 = -L$$ È risolubile?

So che è risolubile

$$x^3 = L \quad (L > 0)$$

e la soluz. è

$$x_0 = \sqrt[3]{L} \quad (\text{significa } x_0^3 = L)$$

Considero $x = -x_0$

$$(-x_0)^3 = (-1 \cdot x_0)^3 = (-1)^3 \cdot (x_0)^3 = -(x_0^3)$$

$$\Rightarrow \quad (-x_0)^3 = -L$$

La soluz. di $x^3 = -L$ è quindi

$$x = -\sqrt[3]{L}$$

Mostro che esiste un $x \in \mathbb{R}$ t.c.

$$x^3 < -L$$

Infatti sia $a < -\sqrt[3]{L} < 0$

$$a^2 > (-\sqrt[3]{L})^2 = (\sqrt[3]{L})^2$$

$$a^3 < \underbrace{-\sqrt[3]{L} \cdot (\sqrt[3]{L})^2}_{} = -(\sqrt{L})^3 = -L$$

1.3 mettere in ordine crescente:

1.001 , $1.414\bar{1}$, $-\pi$, 0.9541 , $-3.34\bar{6}$,

$0,998$, $\sqrt{2}$, 0.954 , -3.1416 ,

$-3,347$

min

$-3,347 < -3.34\bar{6} < -3.1416 < -\pi \approx -3.1415\ldots <$

$< 0,954 < 0,9541 < 0,998 < 1,001 <$

$< 1.414\bar{1} < \sqrt{2}$

MAX

1.4 intervalli o unione di intervalli

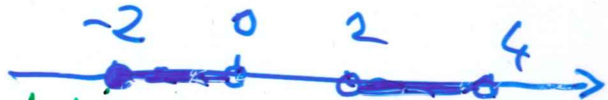
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \le 5\} = (-2, 5] =$ $\sup A = -2$ $\max A = 5$

TALE CHE

$= (-\infty, 5] \cap (-2, +\infty)$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x < 0$ oppure $2 < x < 4\} =$

$= [-2, 0) \cup (2, 4)$



$\min B = -2$ $\sup B = 4$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -7/4 \le x < 1$ oppure $x > 3\} =$

$= [-7/4, 1) \cup (3, +\infty)$ $\min C = \frac{-7}{4}$ $\sup C = \ldots +\infty$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le -1$ oppure $2 \le x < \frac{8}{3}\} =$

$= (-\infty, -1] \cup [2, 8/3)$ $\inf D = -\infty$ $\sup D = 8/3$

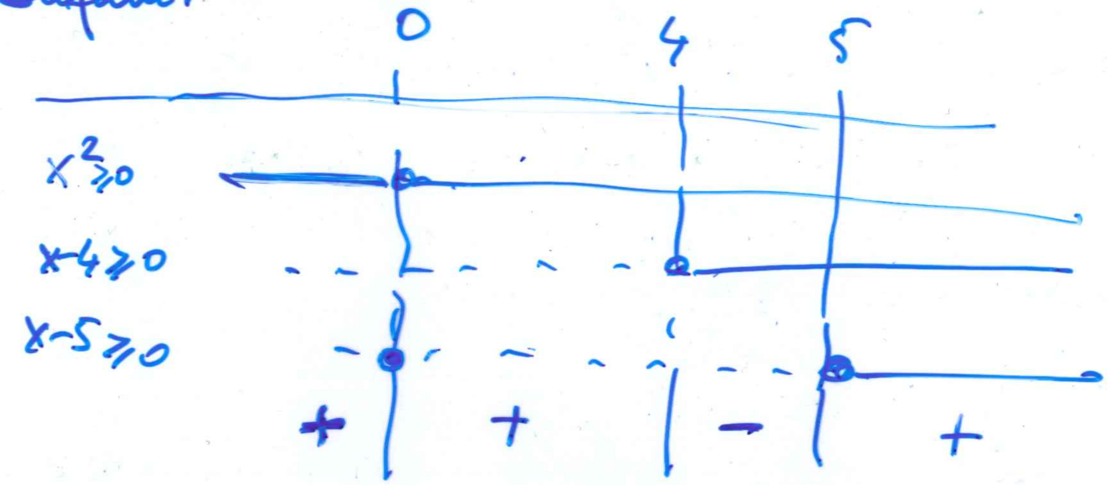
$$A = \left(-\frac{4}{3}, 1\right] \cup (2, +\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{3} < x \leq 1 \ \vee\ x > 2 \right\}$$

$$B = \left[-\tfrac{1}{2}, 0\right) \cup (1, 5] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 0 \ \vee\ 1 < x \leq 5 \right\}$$

$$C = \{0\} \cup (4, 5] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \ \vee\ 4 < x \leq 5 \right\}$$

è soluzione del sistema:
$$\begin{cases} x^2(x-4)(x-5) \leq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

Infatti:



$0 \qquad 4 \leq x \leq 5$: Sol della I disequ.

$$E = \left\{ 2^{2-n} \ : \ n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$$
$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$2^{2-n} = 2^2 \cdot 2^{-n} = 4 \cdot \frac{1}{2^n}$$

$0 < 2^{2-n} \leq 2$ MASSIMO

Inf? si $\longrightarrow \varepsilon > \frac{4}{2^n}$