FUNZIONI NUMERICHE (REALI DI VARIABILE REALE)

Esempi

- spostamento di un grave lasciato cadere (da una altezza h) in dipendenza del tempo:

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

- Volume di una sfera in dipendenza del suo raggio

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Trasformazioni isoterme (di una mole di gas ideale)

$$p(V) = RT \cdot \frac{1}{V}$$

(p = pressione, V: volume, T = temperatura assoluta: costante, R = 1.986 cal/grado)

Elementi essenziali:

- un insieme di partenza A
- un insieme di arrivo B
- una legge f che a ogni elemento x dell'insieme di partenza ne associa 1 e 1 solo y nell'insieme di arrivo (UNIVOCITA')

Queste tre cose definiscono una FUNZIONE.

SYMB! $\quad f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R} \ / \ f(x) = y$

f: legge univoca

A: insieme di definizione (... DOMINIO)

$f(A) = \{y \in B \subseteq \mathbb{R} \text{ t.c. } \exists x \in A \text{ per cui } f(x) = y\}$: IMMAGINE di f

GRAFICO di f: $G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x \in A \text{ e } y = f(x)\}$
$= \{(x, f(x)) \text{ con } x \in A \subseteq \mathbb{R}\}$

F 1.1

$f(x) = y$

x variabile indipendente

y variabile dipendente

" f è una funzione reale (1) di variabile reale (2) "

(1) i valori assunti dalla funzione stanno in $\mathbb{R}$

cioè i valori della variab. dipendente y

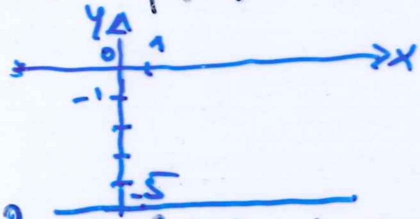
(2) la funzione f è calcolata in punti dell'asse reale

→ variabile indip. x

ESEMPI

legge univoca

1. $f(x) = -5$

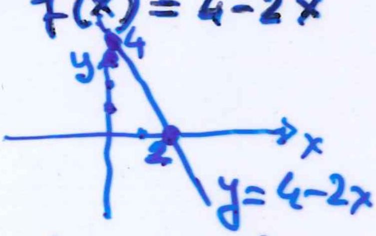


ins. di def. $A = \mathbb{R}$

immagine $f(A) = \{-5\}$

grafico $= \{(x,-5),\ x \in \mathbb{R}\}$

2. $f(x) = 4-2x$



$A = \mathbb{R}$

$f(A) = \mathbb{R}$ perché...

VEDI pag F2.1

grafico

x	0	2
$f(x)$	4	0

3. $f(x) = x^2$

$A = \mathbb{R}$

$f(A) = [0,+\infty)$ VEDI F2.1

e $f(x) = -x^2$?

grafico vedi F2.2

x	0	1/2	1	3/2	2
$f(x)$	0	1/4	1	9/4	4

altri commenti a pag F 2.4

4. $f(x) = \frac{1}{4} x^2$

$A =$

$f(A) =$

grafico

x	0	1/2	1	3/2	2	3
$f(x)$						

$f(x) = 2x^2$?

5. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

$A =$

$f(A) =$

VEDI F2.3

$= \frac{1}{4}\left(\qquad\qquad \right)$

$= \frac{1}{4}\left(\qquad \right)^2 - 1$ VEDI SOL. EQ. DI 2° GRADO

$$\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y+1 \end{cases}$$

ANCORA PIÙ SEMPLICE : $f(x) = 0$ per $x=-1$ e $x=3$

ASSE DELLA PARABOLA : $x = \frac{-1+3}{2}$

VERTICE : $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow (1,-1)$ ....

RELAZIONE CON LA RISOLUZ. DI DISEQ. DI 2° GRADO

$f(A) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y = f(x) \}$

y_0 t.c. $\exists\, x_0$ per cui $f(x_0) = y_0$?

se $f(x) = 4 - 2x$: fissato $y_0 \in \mathbb{R}$ (comunque fissato)

$\exists\, x_0$ t.c. $y_0 = 4 - 2x_0$?

Sì : $x_0 = \dfrac{4 - y_0}{2}$

$\Rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Il grafico è quello della retta $y = 4 - 2x$

---

3. Sull'immagine di $f(x) = x^2$:

$\forall x \in \mathbb{R} \; : \; x^2 \geq 0$

1°) $x = 0$ $\quad 0^2 = 0$ è l'unico caso in cui si annulla

2°) $x > 0$ $\quad x \cdot x > x \cdot 0 > 0 \cdot 0 \Rightarrow x^2 > 0$

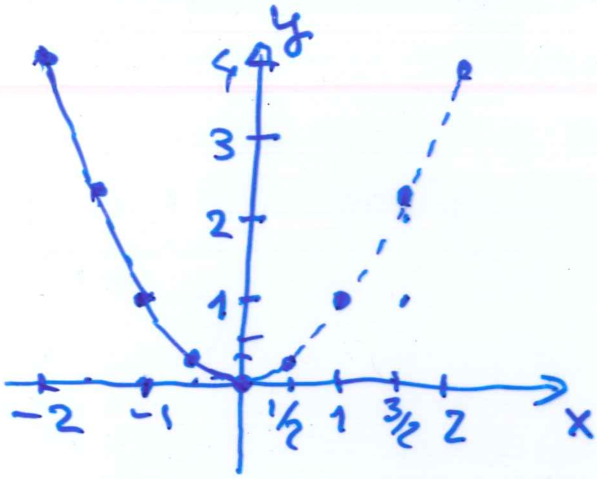
pr. di COMPATIBILITÀ   PR. Transitiva

3°) $x < 0$

$-x > 0 \Rightarrow (-x)^2 > 0$, $\quad (-x)^2 = x^2$

$\Rightarrow x^2 > 0$

Attenzione: il teor. di $\exists$ delle radici quadrate aritmetiche dice che $\forall y \in [0, +\infty)$ $\exists\, x \in [0, +\infty)$ tale che $f(x) = y$: quindi l'immagine è davvero tutto $[0, +\infty)$.



$x < 0$

$(-x)^2 = x^2$

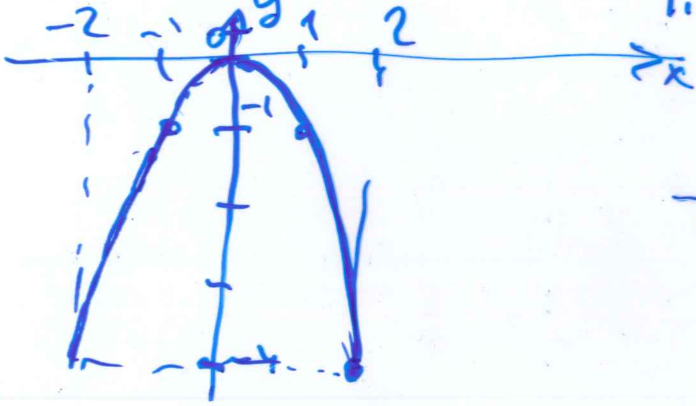
$f(x) = x^2$

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

grafico simmetrico rispetto all'asse y

FUNZ. PARI

$f(x) = -x^2$



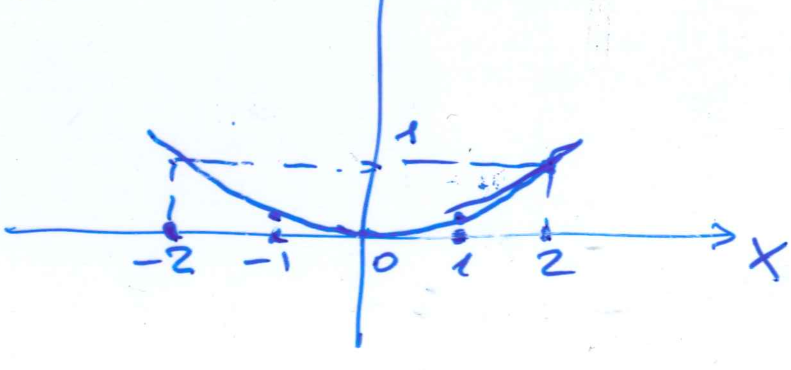
I.D. $\mathbb{R}$. $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0]$

In generale

$-f(x)$ ha grafico simmetrico di quello di $f(x)$ rispetto all'asse x

---

4. $f(x) = \frac{1}{4} x^2$



F2.3

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

I.D. : $\mathbb{R}$

grafico : parabola con asse // asse y.
e concavità verso l'alto.

Ha degli <u>zeri</u> reali cioè se esistono punti x dell'asse x su cui $f(x)=0$

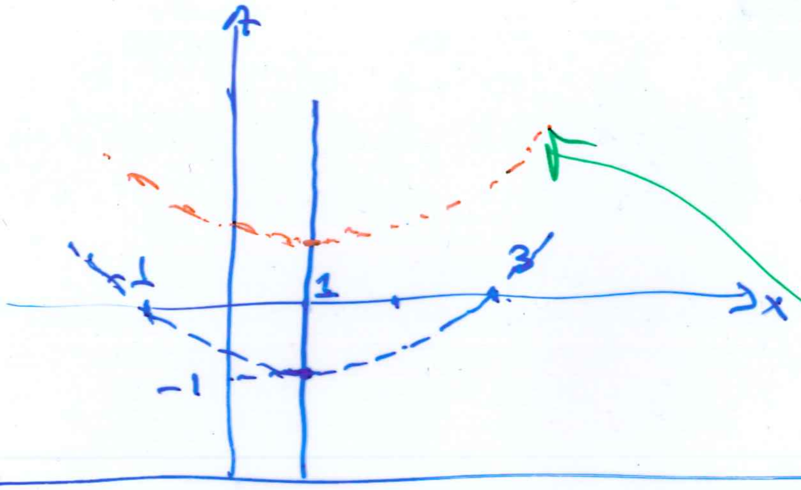
$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0 \qquad x_1 = -1,\ x_2 = 3$$

asse $x = 1$

$f(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 1$



$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

grafico traslato nella direzione dell'asse y di 7/4

zeri? $x^2 - 2x + 4 = 0$

$(x-1)^2 + 3 = 0$ M+1

simmetria rispetto a $x=1$

Abbiamo visto (pag R7.3)
che

$$\boxed{\forall a,b \in \mathbb{R} \text{ con } 0<a<b \text{ si ha } a^2<b^2}$$

(poiché
$0 < a \cdot a < a \cdot b$ per compatibilità
$0 < a \cdot b < b \cdot b$ "
e quindi per propr. transitiva $a \cdot a < b \cdot b$)
e questo spiega perché nel grafico di

$$f(x) = x^2$$

quando $x > 0$ "cresce" anche $f(x)$ "cresce".
Sul grafico si capisce anche che se $x < 0$ e x "cresce" (cioè si avvicina a 0), $f(x)$ "decresce". In effetti

$$\boxed{\forall a,b \in \mathbb{R} \text{ con } a<b<0 \text{ si ha } a^2>b^2}$$

poiché (proprietà derivata dalla compatibilità)

$a \cdot a > a \cdot b > 0$ (essendo $a<0$)
$a \cdot b > b \cdot b > 0$

e vale la propr. transitiva $\Rightarrow a \cdot a > b \cdot b$.

Se invece $a < 0 < b$ nulla si può dire sul quadrato di a e di b.
Ad es. se $a = -1$ e $b = 2$ $a^2 = 1 < 2^2 = b^2$
ma se $a = -2$ e $b = 1$ $a^2 = 2^2 > 1 = b^2$

Cioè per $f(x) = x^2$ ci sono 2 intervalli su cui si può fare un'affermazione a priori su come sarà $f(a)$ rispetto a $f(b)$ conoscendo come è a rispetto a b : $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$. Su intervalli messi a cavallo di 0 non si può dire nulla.