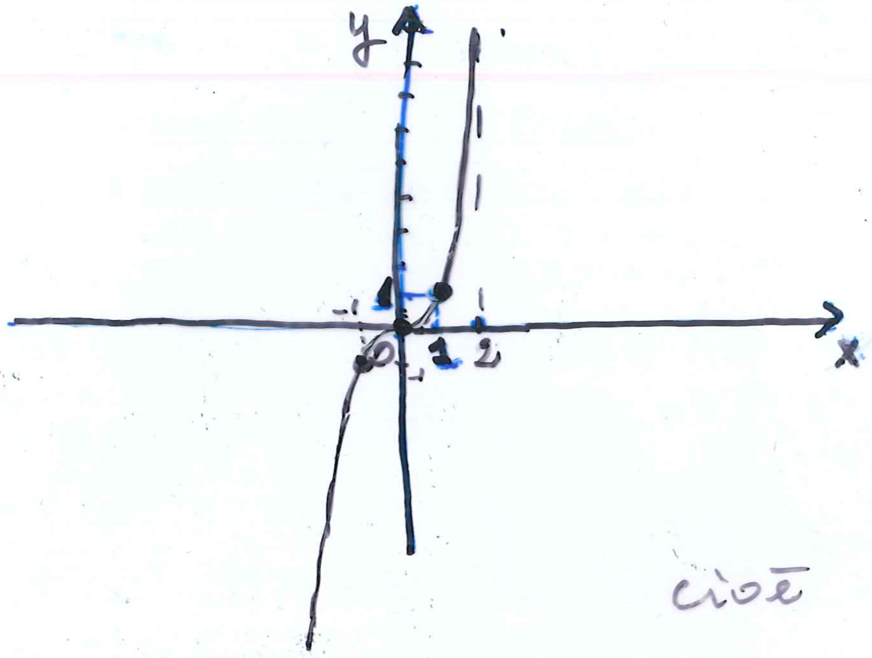
STUDIO

$f(x)=x^3$




$f(1)=1$

$f(-1)=-1$ e in generale

$f(-x)=(-x)^3=-x^3$

cioè $f(-x)=-f(x)$ :

FUNZIONE ~~DI~~SPARI

Inoltre: $a<b \implies a^3<b^3 \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$ ?

Dal grafico pare di sì. Lo verifichiamo

(I) se $0<a<b$ $\quad a^2<b^2$

(II) se $a<b<0$ $\quad a^2>b^2$

VEDI pag F2.4

Allora

(I) se $0<a<b$ da $a^2<b^2$ ricavo $a\cdot a^2<ab^2$
e da $b^2>0$ ricavo $ab^2<b\cdot b^2=b^3$ $\implies a^3<b^3$

(II) se $a<b<0$ $\quad a^2>b^2$
$a<0$ $\quad a^3<ab^2$
$\left.\begin{array}{l}a<b<0\\ b^2>0\end{array}\right\} \implies ab^2<b^3$ $\implies a^3<b^3$

(III) $a<0<b$
$a^3<0<b^3 \implies a^3<b^3$

TRADUCIAMO i fatti I, II, III dicendo che la funzione $f(x)=x^3$ (con dominio e immagine $\mathbb{R}$) è <u>crescente</u> su $\mathbb{R}$. Infatti:

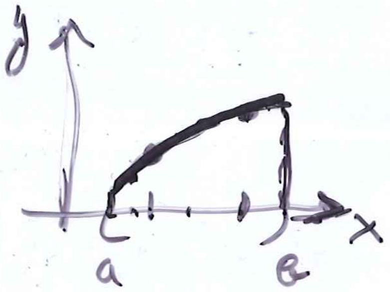
DEFINIZIONE

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ( $(a,b)$ $\boxed{\text{intervallo}}$ aperto, ma potrebbe essere chiuso o semi aperto.. limitato o illimitato)

- Dico che la funzione è monotona crescente su $(a,b)$

se $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$

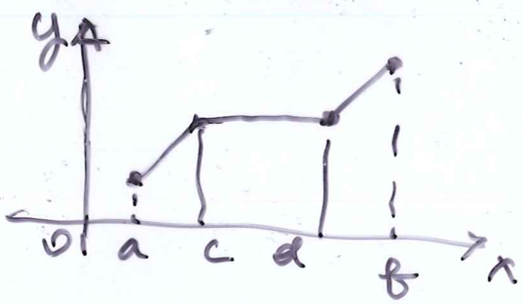
se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$




- Dico che la funzione è monotona NON decrescente su $(a,b)$ se

$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$

se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) \leq f(x_2)$

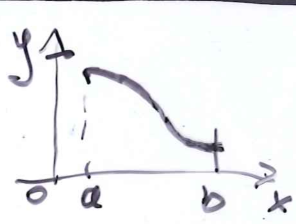



non decrescente NON è la vera NEGAZIONE di decrescente

- Dico che la funz. è monotona DECRESCENTE su $(a,b)$ se

$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$

se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) > f(x_2)$



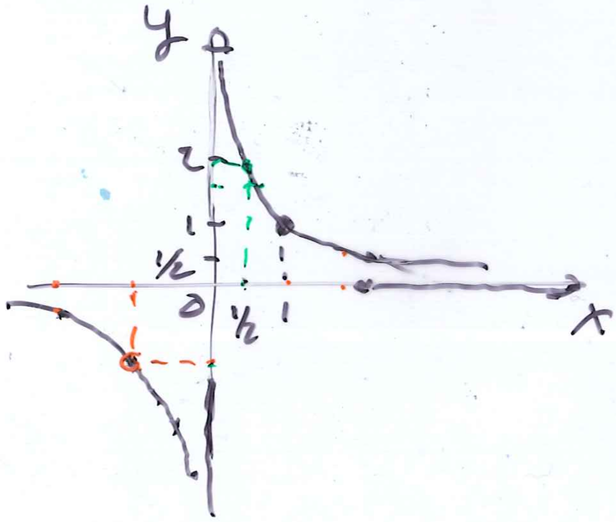
$f(x) = \frac{1}{x}$ I.D. $A = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Immagine?

per quali $y\in\mathbb{R}$ $\exists\, x$ t.c. $y=\frac{1}{x}$ ?

$x = \frac{1}{y}$ $\Rightarrow$ deve essere $y\neq 0$

$\Rightarrow f(A) = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$




Sia $a<b$.

(I) $a<0<b$

$\frac{1}{a}<0<\frac{1}{b}$.

(II) $0<a<b$ (moltiplico per $\frac{1}{a}>0$ $\frac{1}{b}>0$)

$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

$\Rightarrow$ <u>in</u> $(0,+\infty)$

$f(x)=\frac{1}{x}$ <u>è decresc.</u>

(III) $a<b<0$ • $\frac{1}{a}$ $(<0)$

$1=\frac{1}{a}\cdot a>\frac{1}{a}b>0$ • $\frac{1}{b}$ $(<0)$

$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}\cdot\left(b\cdot\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a}$ $\Rightarrow$ <u>in</u> $(-\infty,0)$ $f(x)=\frac{1}{x}$

<u>è decresc.</u>

MA non posso dire nulla in $(a,0)\cup(0,b)$ (VEDI I)

$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$ Dispari!

Grafico simmetrico risp. $(0,0)$

Basta tracciarlo per $x>0$

| $x$ | $1/2$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | $1$ | $1/2$ |

# Potenze con esponente intero $\geq 0$

$\boxed{a \in \mathbb{R}}$

$$a^n = \begin{cases} 1 & n=0 \text{ DEF solo se } a \neq 0 \\ a & n=1 \text{ DEF} \\ a^{n-1} \cdot a & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Perché quelle definizioni?

$$a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^{3+2} = a^5$$

in generale

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \forall\, m, n \geq 1$$

voglio che anche

$$a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$$ ciò può succedere solo ponendo $a^0 = 1$, ma deve essere $a \neq 0$

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \forall\, m, n \geq 0$

2) $(ab)^n = a^n \cdot b^n \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad \forall\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, n, m \in \mathbb{N}$

Potenze con <u>esponente intero $< 0$</u> $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

so che $a \cdot \frac{1}{a} = 1 = a^0$ se voglio che valga (1) devo porre:

$$a^1 \cdot a^{-1} = a^0$$

cioè $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (qui si capisce perché escludere dalla def. di $a^0$ la base $a=0$: non possiamo dire che $0 = 0^1 \cdot 0^{-1} = 0^0 = 1$)

se $z = -n$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$

$$a^z = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n \text{ volte}} = \frac{1}{a^n}$$

valgono ancora 1), 2), 3)

ORA PASSIAMO a potenze con esponente razionale. Osserviamo che

Esistono le radici n-esime aritmetiche di ogni numero reale $\geq 0$

$a \in [0, +\infty)$ $\qquad (\sqrt[n]{a})^n = a$ per def

posso raccontarlo come $(a^m)^n = a^1$ ?

come deve essere fatto m? $\qquad m = \frac{1}{n}$

Cioè devo definire

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$(a^{1/n})^n = a^{n/n} = a^1$ È la def di radice

$(a^n)^{1/n} =? a$ $\quad$ sì

Definiamo

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$$
$$= (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

POICHÉ $a \geq 0$ è vero che sono uguali l'identif. è possibile

Le propr. delle radici si traducono nelle 3 propr. delle potenze.

Ma, attenzione

$$a^{1/2} = a^{-1/-2} = \left((a^{-1})\right)^{\frac{1}{-2}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1/a}}$$

cioè se non parlo di razionali assoluti (con numeratore e denom. che sono numeri NATURALI) anche un esponente razionale positivo può introdurre denominatori $\Rightarrow$ deve essere $a \neq 0$

Ancora, dato che $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ devo avere

$$x^{1/3} = x^{2/6}$$

Ma $\quad x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ ha I.D. $= \mathbb{R}$

$$x^{2/6} = \sqrt[6]{x^2} \text{ ha I.D.} = \mathbb{R}$$

$$x^{2/6} = \left(\sqrt[6]{x}\right)^2 \text{ ha I.D.} = [0, +\infty)$$

e $\quad x^{-1/-3} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{1/x}}$ ha I.D. $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Perchè queste funzioni siano uguali devo richiedere che abbiano lo stesso I.D.; cioè, intersecando, devo chiedere

$$x \in (0, +\infty)$$

per poter parlare della potenza $x^{1/3}$ (anche se resta vero che $\sqrt[3]{x}$ è def. $\forall x \in \mathbb{R}$).

A maggior ragione, se l'esponente è un razionale $< 0$ (ad es. $-\frac{2}{3}$) dovrò chiedere che la base $x$ sia $> 0$ poichè

$$x^{-2/3} = \left(x^{2/3}\right)^{-1} = \frac{1}{x^{2/3}}.$$

Quindi le potenze con <u>esponente razionale</u>

$$a^{p/q}$$

sono definite solo per una <u>base</u>

$$a > 0$$

Potenze con <u>esp. reali</u> ?

Es. $2^{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}$ è l'elemento separatore di 2 insiemi costituiti ad es. dalle approssimaz. decimali per difetto e per eccesso

$A = \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots\}$

$B = \{2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, \dots\}$

Costruisco i due insiemi

$A' = \{2^1, 2^{1.4}, 2^{1.41}, \dots\}$

$B' = \{2^2, 2^{1.5}, 2^{1.42}, \dots\}$

$\forall a' \in A$ e $\forall b' \in B$ si ha $a' < b'$ poiché

$\forall a, b \in \mathbb{Q}$, se $a < b$ allora $2^a < 2^b$

facile capirlo per $a, b \in \mathbb{N}$ e anche per $a, b \in \mathbb{Z}$. In generale lo vediamo domani.

Quindi $A'$ e $B'$ sono separati $\Rightarrow$ per l'assioma di completezza $\exists$ l'elemento separatore $(= \sup A' = \inf B')$.

Definisco $2^{\sqrt{2}} = \sup A'$

Se la base $a$ è $> 1$ si segue questa traccia; se $a \in (0,1) \Rightarrow 1/a \in (1, +\infty)$

$$a^b = \left(\frac{1}{a}\right)^{-b} = \frac{1}{(1/a)^b}$$

ATTENZIONE all'uso della proprietà

$$(ab)^c = a^c b^c$$

a pag R8

Devo chiedere $a>0$ e $b>0$

Ma:

$$\sqrt{x(x-2)} \neq \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-2}$$

I.D.: $x(x-2) \geq 0$

$\Updownarrow$

$x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

I.D. $[0, +\infty)$ I.D. $[2, +\infty)$

devo intersecare per avere l'I.D. del prodotto che è $[2, +\infty)$

Funzioni con I.D. diverso sono diverse!

Se voglio scomporre in prodotto di radicali posso scrivere

$$\sqrt{x(x-2)} = \begin{cases} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-2} & \text{se } x \geq 2 \\ \sqrt{-x} \cdot \sqrt{2-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Potenze con <u>esponente razionale</u>:

$$\sqrt[n]{a} =: a^{1/n} \qquad (a \geq 0 \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N})$$

Di qui

$$a^{\frac{m}{n}} := (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (a \geq 0 \quad \tfrac{m}{n} > 0)$$
$$= (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Se voglio $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, qualsiasi devo chiedere

$$a > 0.$$

Potenze con <u>esponente reale</u> (base $a > 0$)

Definite "per approssimazione" ....

Es. $2^{\sqrt{2}}$ ?

PROPRIETÀ

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$; $\forall c, d \in \mathbb{R}$:

- $a^0 = 1 \quad \forall a$ ; $1^c = 1 \quad \forall c$
- $a^c \cdot a^d = a^{c+d}$
- $a^c \cdot b^c = (ab)^c$
- $(a^c)^d = a^{cd}$
- $a^c > 0$
- se $c > 0$ : $a > 1 \Rightarrow a^c > 1$
  $0 < a < 1 \Rightarrow a^c < 1$

se $c < 0$ : si scambia