Potenze con <u>esponente razionale</u>:

$$\sqrt[n]{a} =: a^{1/n} \qquad (a \geq 0 \quad n \geq 1, \, n \in \mathbb{N})$$

Di qui

$$a^{\frac{m}{n}} := (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (a \geq 0 \quad \frac{m}{n} > 0)$$
$$= (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Se voglio $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, qualsiasi devo chiedere

$$a > 0.$$

Potenze con <u>esponente reale</u> (base $a > 0$).

Definite "per approssimazione" ....

Es. $2^{\sqrt{2}}$?

PROPRIETÀ

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$; $\forall c, d \in \mathbb{R}$:

- $a^0 = 1 \quad \forall a$; $1^c = 1 \quad \forall c$
- $a^c \cdot a^d = a^{c+d}$
- $a^c \cdot b^c = (ab)^c$
- $(a^c)^d = a^{cd}$
- $a^c > 0$
- se $c > 0$: $a > 1 \Rightarrow a^c > 1$
  $0 < a < 1 \Rightarrow a^c < 1$ $\Rightarrow$ vedi pag R8.1
  se $c < 0$: si scambia vedi pag R8.2

Se $c = \frac{1}{n}$ e $\boxed{\underbrace{a > 1}_{IP} \Rightarrow \underbrace{a^c > 1}_{TS}}$ R8.1

Non sia vera la tesi

$$a^c \le 1$$

$$a = (a^c)^n \le 1^n = 1$$

non sarebbe vera l'ipotesi

Questo si chiama:

DIMOSTRARE PER CONTRONOMINALE

$$A \Rightarrow B$$

equivale

$$\text{non} B \Rightarrow \text{non} A$$

$\Rightarrow$ se $c = \frac{m}{n}$ e $a > 1$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = \left(a^{1/n}\right)^m > 1^m = 1$$

e adesso lavoro con $\sup\{A\}$

A = insieme dei razionali che approssimo per difetto il numero reale c.

Così ho la dimostrazione per gli esponenti $c \in (1, +\infty)$ reali

---

$0 < a < 1$ $\quad c > 0 \quad$ $a^c < 1$

perché $\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^c > 1 \Rightarrow \frac{1}{a^c} > 1 \Rightarrow a^c < 1$

$c<0 \qquad a>1$

$c=-|c| \qquad$ ove $|c|>0$

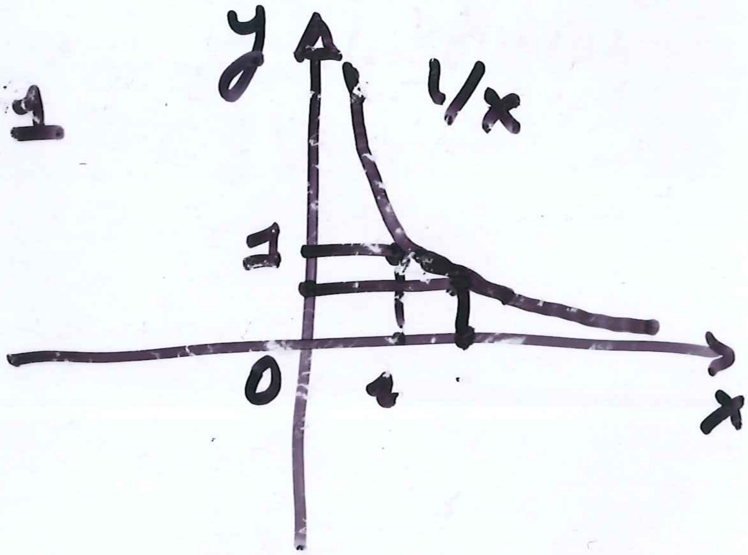
$\Rightarrow \quad a^{|c|}>1$

$\Rightarrow \quad (a^{|c|})^{-1}<1$

$\Updownarrow$

$a^{-|c|}<1$

cioè $0<a^c<1$



E quindi se $\quad 0<a<1 \quad$ e $c<0$

$a^c>1$

Ieri

$\sqrt{2} \qquad A=\{1,\ 1{,}4,\ 1.41\ldots\}$

$\qquad B=\{2,\ 1.5,\ 1.42\ldots\}$

$2^{\sqrt{2}} \qquad A'=\{2^1,\ 2^{1.4},\ 2^{1.41},\ldots\}$

$\qquad B'=\{2^2,\ 2^{1.5},\ 2^{1.42},\ldots\}$

A' e B' sono separati... ?

Cioè è vero che $\forall c \in A$ e $\forall d \in B$

$$2^c < 2^d \, ?$$

Se tengo conto del fatto che $c<d$ questo è quanto afferma una delle disuguaglianze che dovremo provare circa le potenze con esponente reale:

* Se $a>1$, $c<d \Rightarrow a^c < a^d$

[Se $0<a<1$, $c<d \Rightarrow a^c > a^d$]

cioè la monotonia di a^x.

Per provare questa disug. si può osservare che * vale certamente per gli esponenti naturali e poi passare ai razionali >1 usando la strategia suggerita dal successivo esempio: $2^{1,4} < 2^{1,5}$.

Si procederà poi ad estendere a esponenti reali usando le approssimazioni e il Sup.

R8.4

$$2^{1.4} < 2^{1.5} \; ?$$

cioè

$$2^{7/5} < 2^{3/2} \; ?$$

$$\left(2^{14}\right)^{1/10} < \left(2^{15}\right)^{1/10} \; ?$$

sarà vero (dato che

$$2^{14} < 2^{15})$$

se $x^{1/10}$ è una funzione crescente

Scemico il problema sulle potenze a esponente naturale e le loro inverse che sono le radici n-esime.

COMPOSIZIONE DI 2 FUNZIONI

Vedi ESEMPI 8 - 11 BIS

$f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$

$g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow C \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$g \circ f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow C \subseteq \mathbb{R}$

$g \circ f\,(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$

Se $C \neq A$, $f \circ g$ è un NONSENSO

Se $C = A$ può essere $f \circ g \neq g \circ f$

ESEMPIO: $f(x) = |x| \quad g(x) = x + 1$ Vedi pag F8.1

Se $C = A$ e $\begin{cases} g \circ f(x) = x & \forall x \in A \\ f \circ g(y) = y & \forall y \in B \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & B \arrow[dl, "g"] \\ C & \end{tikzcd}$$

Si dice che f è invertibile e che g è la sua inversa (NOTAZIONE: $g =: f^{-1}$)

ESEMPI

$f(x) = x^2$, $A = [0, +\infty)$ $B =$, $f^{-1}(y) =$

$A = (-\infty, 0)$ $B =$, $f^{-1}(y) =$ Vedi pag F8.2 ss.

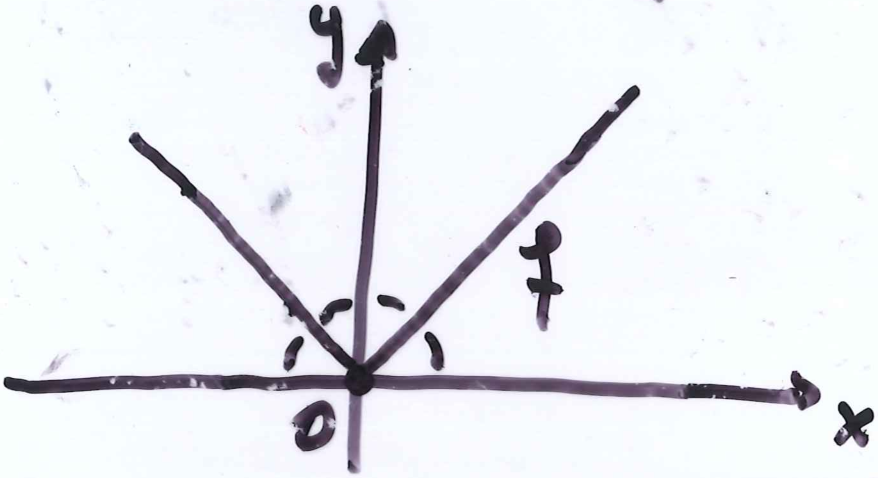
$f(x) = x^3$

F8.1

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\text{I.D.} = \mathbb{R}$

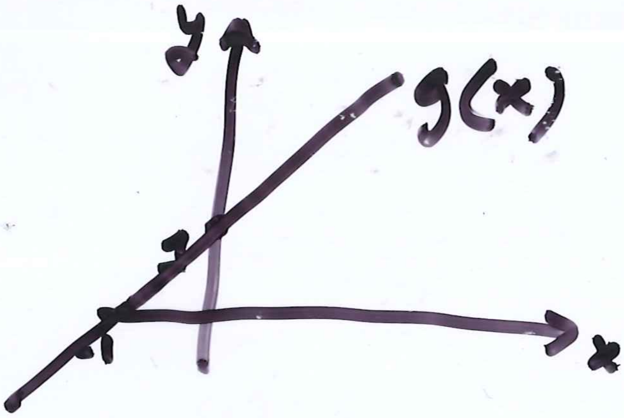
$\text{Im} f = [0, +\infty)$



$g(x) = x + 1$

$\text{I.D.}\ \mathbb{R}$

$\text{Im}\, g = \mathbb{R}$

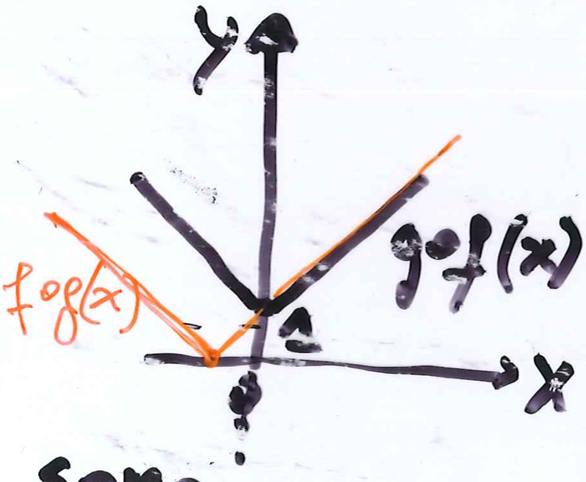


$g \circ f(x) =$

$= g(|x|) = |x| + 1$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "g \circ f"'] & {[0,+\infty)} \subseteq \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

insieme di arrivo NON IMMAGINE



sono DIVERSE!

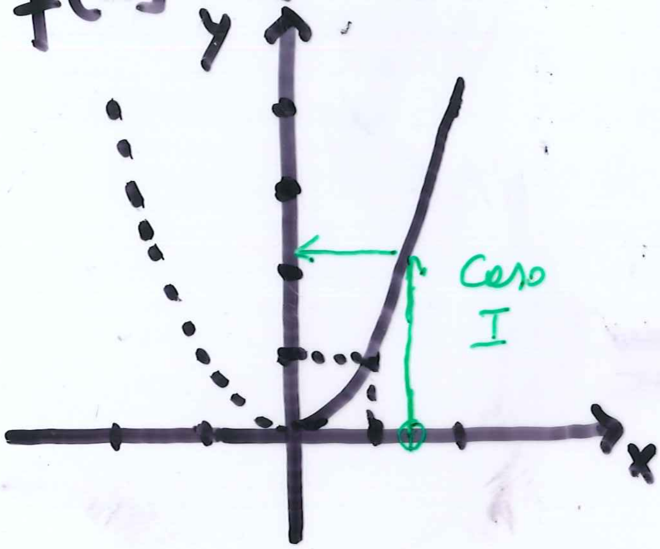
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & {[0, +\infty)} \end{tikzcd}$$

$f \circ g(x) = f(x+1) = |x+1|$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

I

$f(x)=x^2$



se come dominio prendo $[0,+\infty)$ è invertibile e la sua inversa

$$\underset{y}{g:[0,+\infty)} \longrightarrow \underset{x}{[0,+\infty)}$$

è tale che $f(g(y))=y$

cioè $(g(y))^2=y$

cioè $g(y)=\sqrt[2]{y}$

per def di radice quadrata aritmetica.

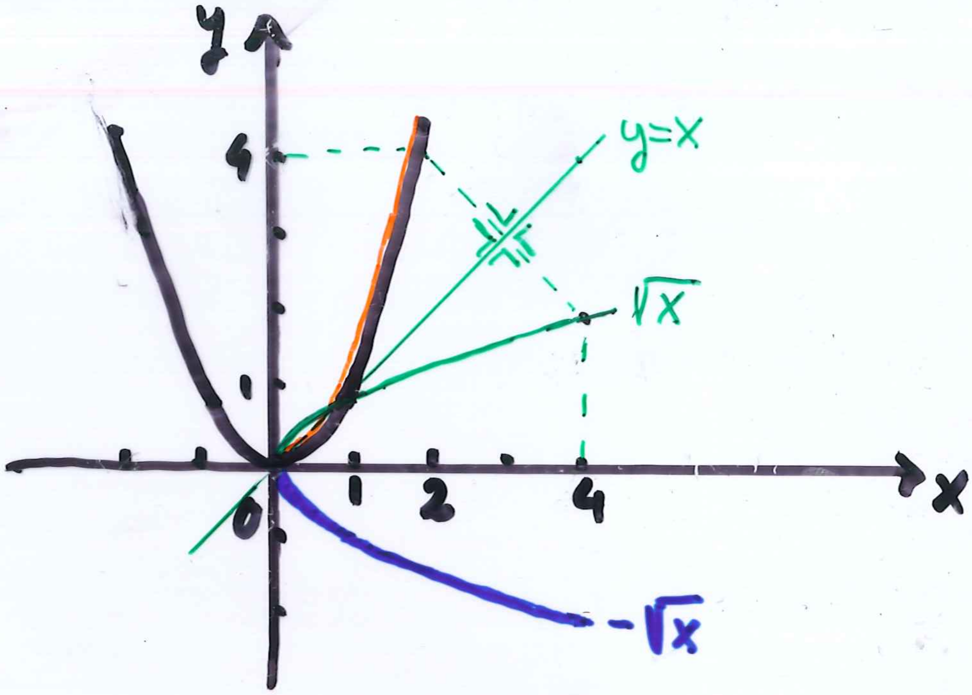
II

Se penso $f: \underset{x}{(-\infty,0]} \longrightarrow \underset{y}{[0,+\infty)}$

è invertibile e l'inversa $g(y)$

$g:[0,+\infty) \longrightarrow (-\infty,0]$ ed è tale che $f\circ g(y)=y$ e visto che l'immagine deve essere ≤ 0

$g(y)=-\sqrt{y}$



$f(x) = x^2$ $\qquad$ $g(y) = \sqrt{y}$

Se chiamo y la variabile indipendente il grafico è quello in rosso (coincide con quello di $f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$)

$g(x) = \sqrt{x}$ ← cambio nome della variab. indep.

scambio la x con la y

⇒ il grafico è simmetrico del grafico di $f(x)$ rispetto a $y=x$

In blu il caso dell'inversa di

$f: (-\infty,0] \to [0,+\infty)$

1) Una funzione STRETTAMENTE MONOTONA (cresc. o decresc.) su (a,b) è invertibile relativamente all'intervallo

$$f:(a,b) \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R} \quad ?$$

Sì, infatti una funzione monotona è

BIUNIVOCA TRA (a,b)
E $f((a,b))$

e le funzioni biunivoche sono invertibili.

DEF. $f: A \longrightarrow B$ è biunivoca

se (a ogni $x \in A$ associa 1 e 1 sol elemento $b \in B$: è una funzione)
e:

- $\forall\, x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$
  INIETTIVITÀ
- $\forall\, y \in B\ \exists\, x \in A \mid f(x) = y$
  SURIETTIVITÀ

Allora se $f: (a,b) \to B = f((a,b))$ è crescente so che

$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

cioè f è iniettiva;

per costruzione la funzione è anche suriettiva

$\Rightarrow$ crescente implica biunivoca
(decresc. " ")

Ora mostro che $f: A \to B$ è biunivoca allora f è invertibile

cioè $\exists\, g: B \to A$ t.c.

$\forall x \in A \quad g(f(x)) = x$

$\forall y \in B \quad f(g(y)) = y$

Come g prendo la corrisp. che a y associa uno degli x t.c. $f(x) = y$ che esistono poiché f è suriett.

Di questi x ne esiste 1 solo poiché è iniett.

cioè questa corrisp è una funz.
Faccio vedere che è l'inversa di f.

$\forall x \in A \quad f(x) = y \xmapsto{g} x$ valore da cui proviene y

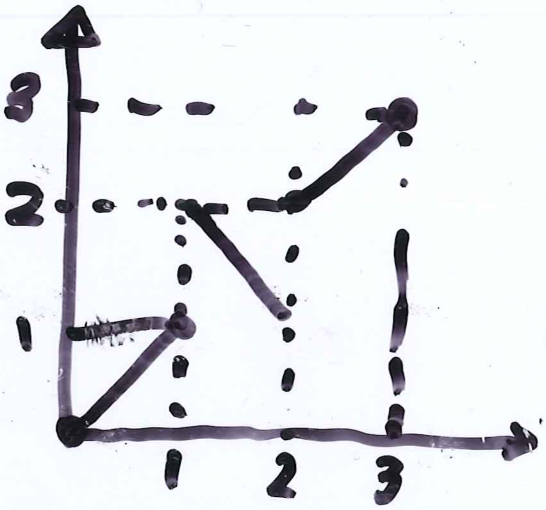
cioè $g(f(x)) = x$

$\forall y \in B \quad g(y) = x$ tale $f(x) = y$

$\Rightarrow \quad f(g(y)) = f(x) = y$ c.v.d.

Si dimostra che è anche vero il viceversa: cioè ogni funz. invertibile è biunivoca.

È vero che ogni invertibile è monotona?



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ 3-x & \text{se } x \in (1,2) \\ x & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}$$

$f : [0,3] \to [0,3]$

è invertibile ma non monotona

2) se $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ è monotona ~~crescente~~ decr. allora la sua inversa f^{-1}

$$f^{-1}: f((a,b)) \to (a,b)$$

è monotona ~~crescente~~ decr.

per ipotesi $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$y_1, y_2 \in f((a,b))$. Quando può essere

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \;?$$

$$\underset{x_1 \in (a,b)}{\parallel} \qquad \underset{x_2 \in (a,b)}{\parallel}$$

Solo se $y_1 \geq y_2$. Infatti

$x_1 \geq x_2$

f monot. cresc $\Rightarrow$

$$f(x_1) \geq f(x_2) = f(f^{-1}(y_2))$$

$$\underset{f(f^{-1}(y_1))}{\parallel} \Rightarrow y_1 \geq y_2 \qquad \text{c.v.d.}$$