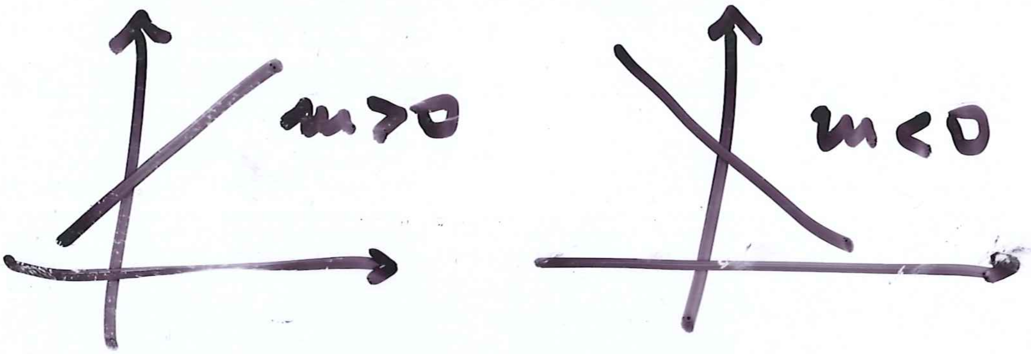
Abbiamo visto i grafici delle seguenti funz elem.:

$f(x) = c \qquad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = mx + q \qquad m, q \in \mathbb{R}$
$m \neq 0$

crescente per $m > 0$; decr. per $m < 0$



$f(x) = x^2$ cresc. in $[0, +\infty)$ ($\Rightarrow$ inv.) $\sqrt{y}$
decr. in $(-\infty, 0]$ ($\Rightarrow$ inv.) $-\sqrt{y}$
pari: $\forall x \in$ I.D. $\exists -x \in$ I.D.
e $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in$ I.D.

$f(x) = x^3$ cresc. in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ invert. in $\mathbb{R}$
$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$
dispari: $\forall x \in$ I.D., $-x \in$ I.D.
e $\forall x \in$ I.D. $f(-x) = -f(x)$

2

$f(x) = \frac{1}{x} =$ I.D. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = A$

$= x^{-1}$ monotona decr. su ciascuno dei 2 interv.

È biunivoca tra A e A

l'inversa è $f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$

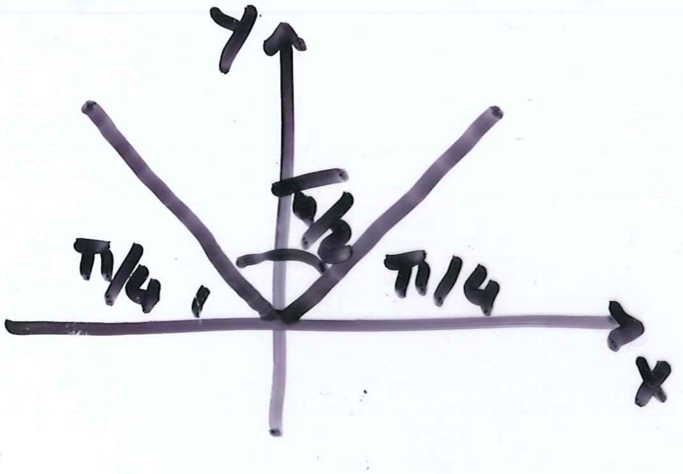
$f: (-\infty, 0) \overset{A}{\cup} (0, +\infty) \to (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$y = 0$: non $\exists\, x \in A$ t.c.

$f(x) = \frac{1}{x} = 0$

cioè il grafico non interseca mai l'asse x.

$f(x) = |x|$ $\quad f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$



Generalizzo:

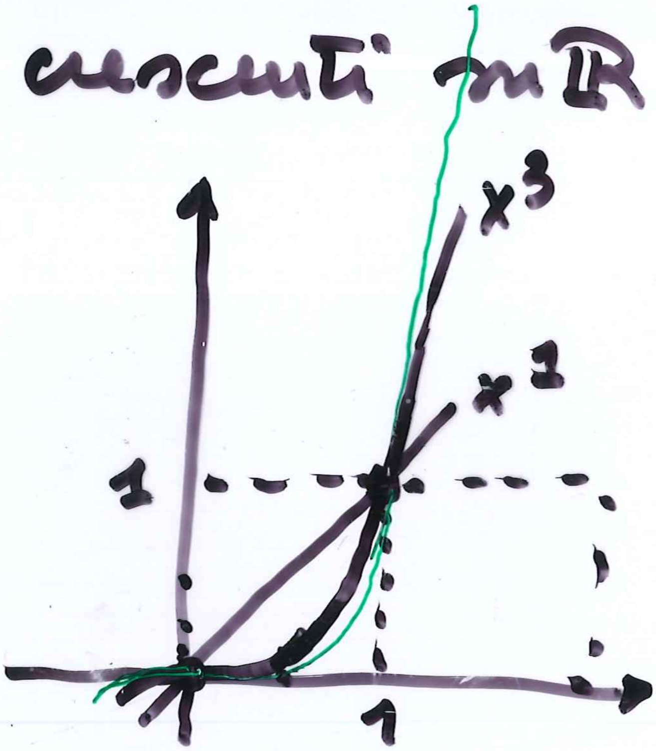
$f(x) = x^{2k}$ $k \in \mathbb{N}$

pari $\Rightarrow$ grafico simmetrico asse y

$f(x) = x^{2k+1}$ $k \in \mathbb{N}$

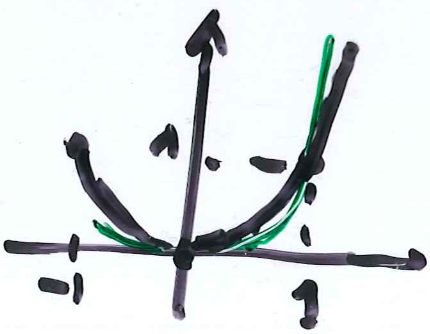
dispari $\Rightarrow$ grafico simm. rispetto $(0,0)$

crescenti su $\mathbb{R}$



$k=0$ $f(x)=1$

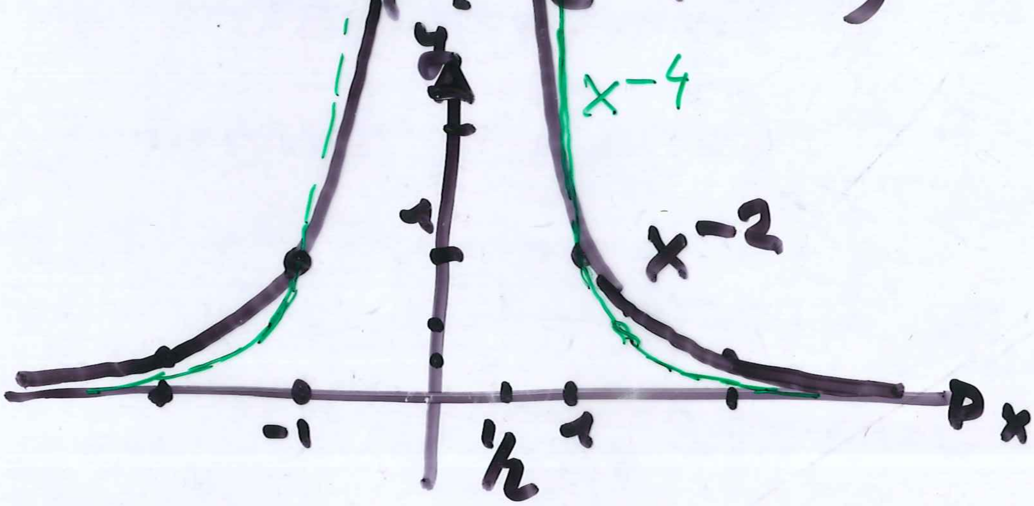
$k>0$: x^{2k} decr. in $(-\infty, 0]$
cresc. in $[0, +\infty)$
(Regola sulle disuguaglianze)



$f(x) = x^{-2k}$ $\quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

I.D.: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

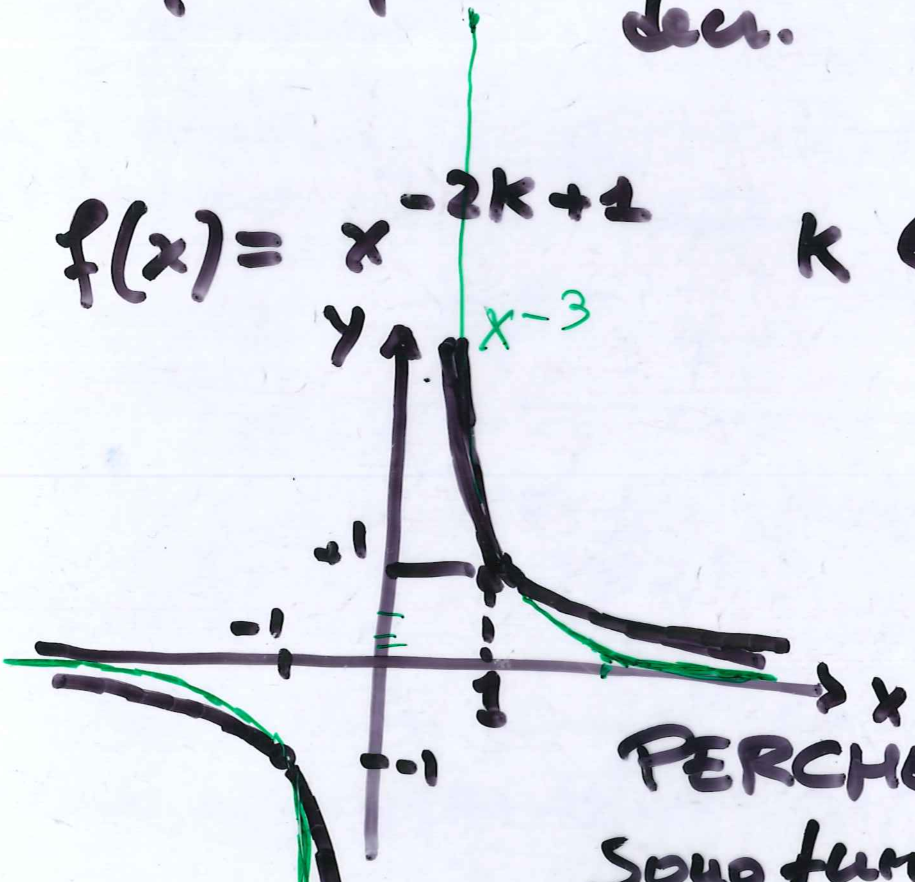
$\operatorname{Im} f = (0, +\infty)$



funz. pari $\quad$ cresce in $(-\infty, 0)$
decr. in $(0, +\infty)$

$f(x) = x^{-2k+1}$ $\quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

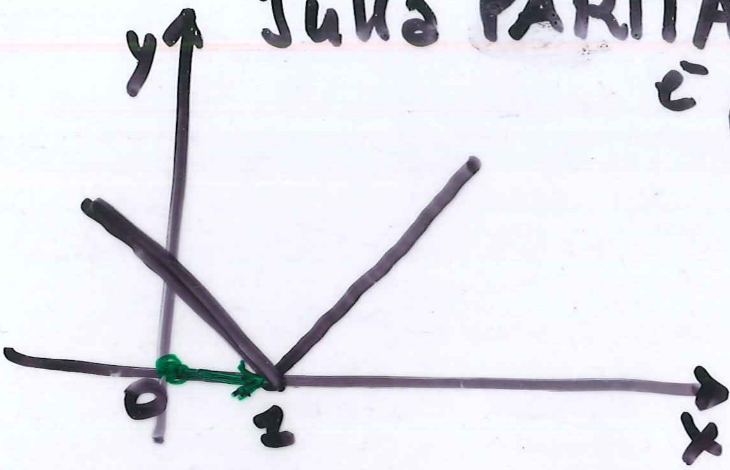
I.D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



PERCHÉ?

Sono funzioni reciproche delle precedenti
($0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
ecc...)

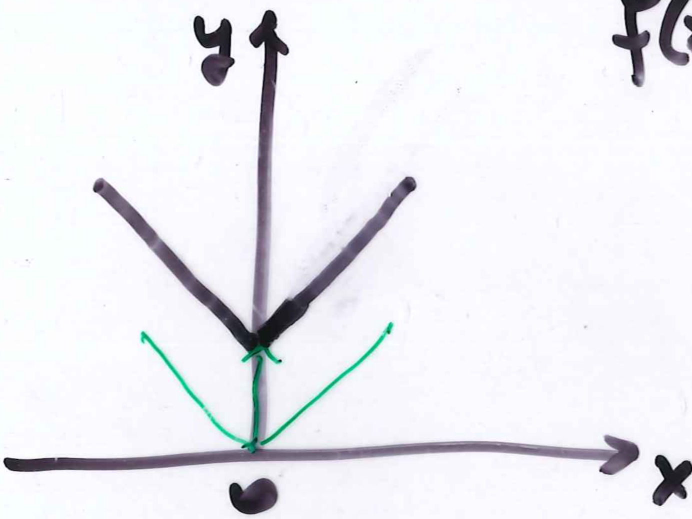
Sulla PARITÀ. Anche se $|x|$ è pari,



$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ 1-x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

il grafico è traslato di quello di $|x|$ di 1 unità nella direzione e nel verso dell'asse x $\Rightarrow$ non è funz. pari

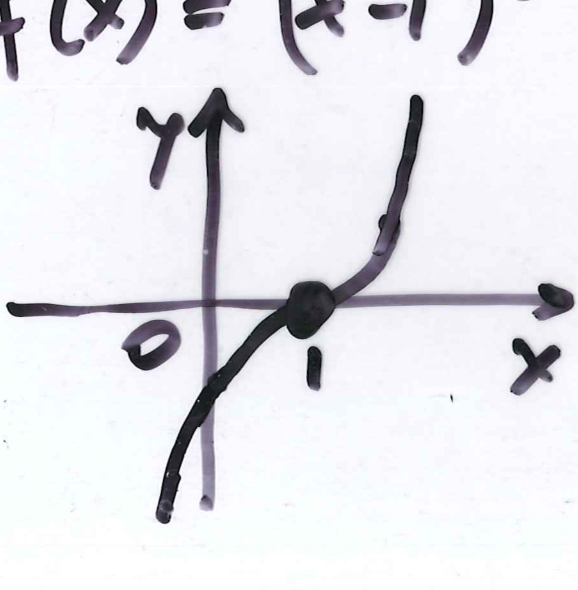
$f(x) = |x| + 1$ invece è funzione pari:



$$f(-x) = |-x| + 1 = |x| + 1$$

o con il grafico.

$f(x) = (x-1)^3$ non dispari ma G_f è simmetrico rispetto a $(1, 0)$. INFATTI:



Il grafico è il TRASLATO di quello di x^3 di 1 unità in direz. e verso dell'asse x

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \quad n \in \mathbb{N} \quad n > 1$$

questa è la funzione inversa di $g(x) = x^n$ che in $(0, +\infty)$ è crescente $\forall n \Rightarrow$

$f(x)$ è crescente in $(0, +\infty)$

$$f(x) = x^{-1/n} = \frac{1}{x^{1/n}}$$ di chi sono l'inversa?

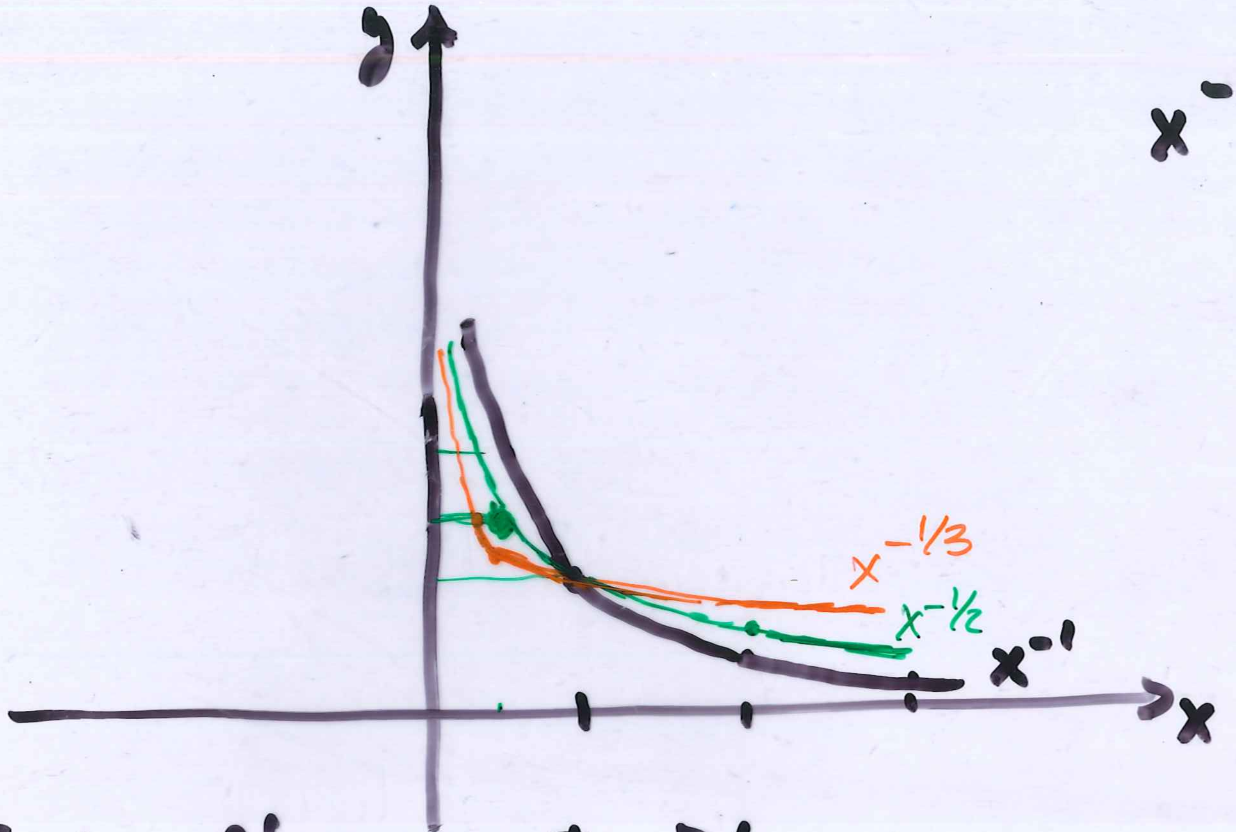
$$t = \frac{1}{x^{1/n}} \Rightarrow x^{1/n} = \frac{1}{t} \Rightarrow x^{n/n} = \left(\frac{1}{t}\right)^n$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{t^n} = t^{-n}$$ Quindi di

$$f^{-1}(t) = t^{-n}$$ Quindi il grafico è

7

$x^{-1/n}$



E se l'esponente è frazione con esp. $\neq 1$?

ESEMPIO:

$f(x) = x^{2/3}$ I.D. $(0, +\infty)$

$f(x) = (x^2)^{1/3}$

$F(x) = x^2$ è crescente

$G(y) = y^{1/3}$ è crescente e quindi...

$f(x) = G \circ F(x)$ è crescente

VEDI 7bis

$F(1) = 1 \quad G(1) = 1 \quad G \circ F(1) = 1$

$2/3 < 1 \quad : \quad 0 < x < 1 \; : \; x^{2/3} > x^1$

$\qquad\qquad\quad x > 1 \; : \; x^{2/3} < x^1$

7bis

$F: A \to B$ crescente sull'intervallo $A = (a,b)$

$G: B \to C$ crescente sull'intervallo $B = (c,d)$

Allora $\forall x_1, x_2 \in A$ - essendo F cresc.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{F(x_1)}_{y_1 \in B} < \underbrace{F(x_2)}_{y_2 \in B}$$

Ora essendo G cresc.

$$\forall y_1, y_2 \in B, \; y_1 < y_2 \Rightarrow G(y_1) < G(y_2)$$

In particolare

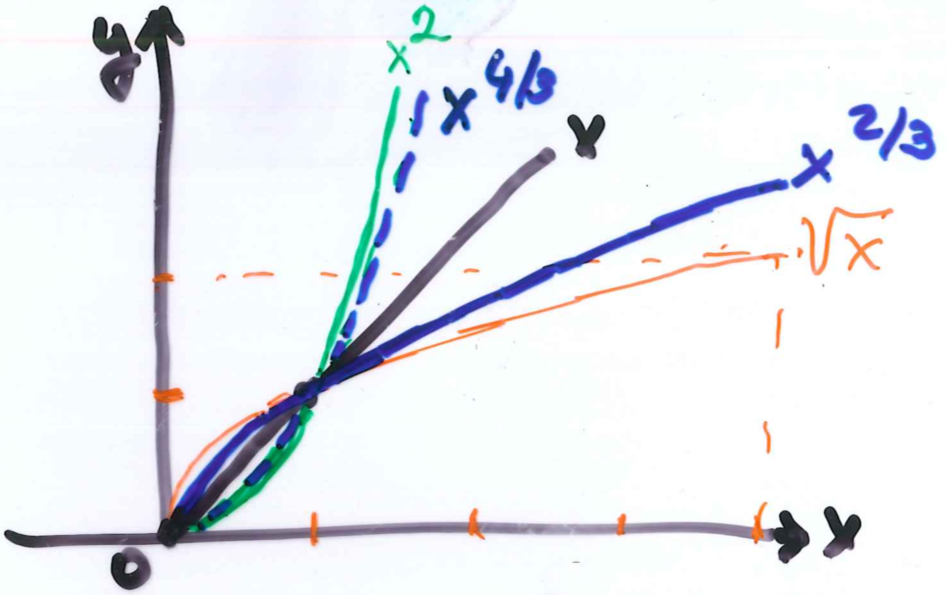
$$F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow G(F(x_1)) < G(F(x_2))$$

Cioè

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow G \circ F(x_1) < G \circ F(x_2)$$

cvd.

Nota: allo stesso modo vedo che se F DECRESCE e G DECRESCE $G \circ F$ CRESCE o che se <u>una</u> <u>cresce</u> e l'<u>altra decresce</u> $G \circ F$ DECRESCE



$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}<1$ se $0<x<1$ $x^{1/2}>x^{2/3}>x^1$

se $x>1$ $x^{1/2}<x^{2/3}<x^1$

$x^{4/3}$ vedi grafico sopra

---

x^α $\alpha\in\mathbb{R}$ $x\in(0,+\infty)$

Vale il seguente fatto:

se $\alpha>0$ e $0<a<b$, $a^\alpha<b^\alpha$ $\Rightarrow x^\alpha$ cresce

se $\alpha<0$ e $0<a<b$, $a^\alpha>b^\alpha$ $\Rightarrow x^\alpha$ decr.

grafici analoghi ai precedenti

Fino ad ora $f(x) = x^{\alpha}$

x varia in $(0,+\infty)$ α costante

(reale qualsiasi)

Ora tengo ferma la base

e faccio variare l'esponente

$$f(x)=a^x \qquad a>0$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ qque}$$

funz. def. su tutto $\mathbb{R}$

$a=1$ $\quad f(x) = 1^x = 1$ BANALE!

Studio solo $a \in (0,1)$

$a \in (1,+\infty)$

$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ se $a \in (0,1)$ il

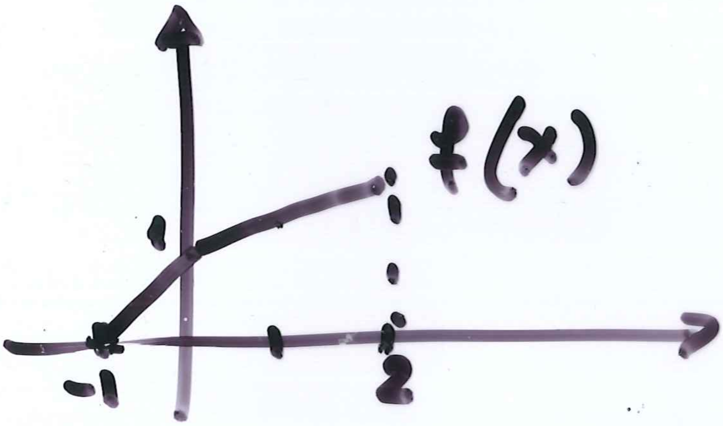
grafico di a^x è ~~simmetrico~~

di quello della esponenziale

$\left(\frac{1}{a}\right)^x$ di base $\frac{1}{a} > 1$

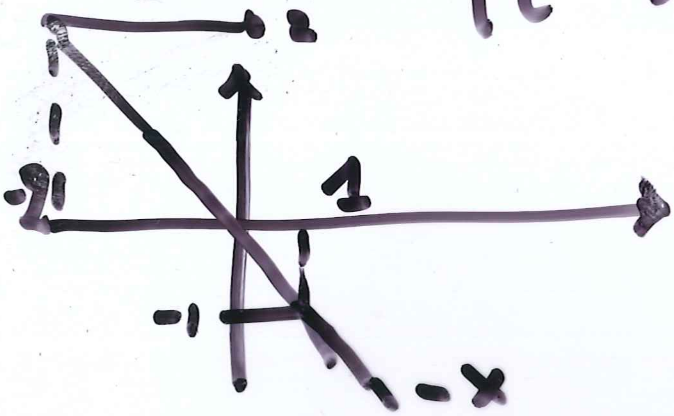
Infatti:

Che cosa significa, data $f(x)$, trova $f(-x)$? ESEMPIO:

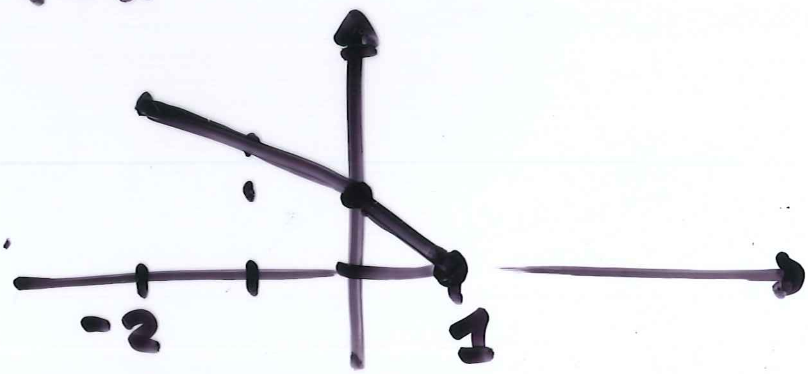


$f : [-1, 2] \to [0, 2]$

Chi è $f(-x)$?



x deve variare in $[-2, 1]$



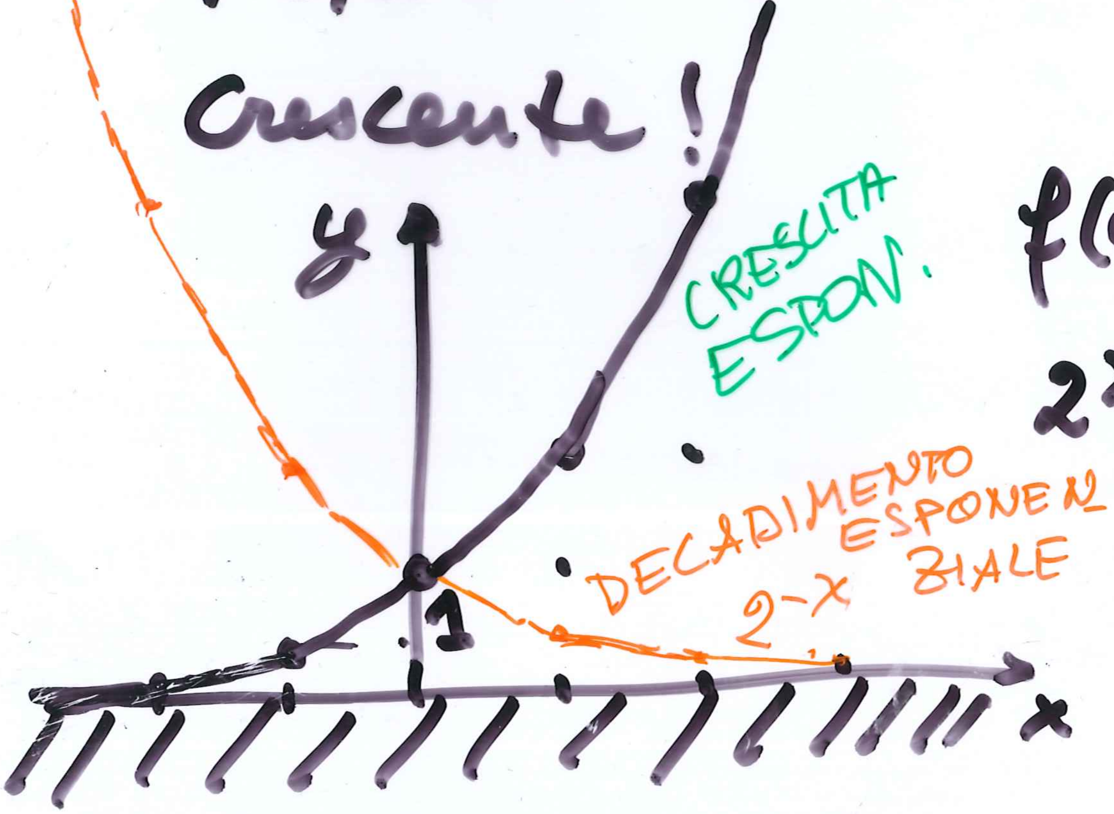
In generale,

$f(-x)$ ha grafico simmetrico rispetto all'asse y di quello di $f(x)$

$f(x) = 2^x$: base $2 > 1$

$\forall\, c, d \in \mathbb{R} \quad c < d \Rightarrow 2^c < 2^d$

Crescente!



$f(0) = 2^0 = 1$

$2^x > 0$

x	2^x
1	2
2	4
3	8
−1	1/2
−2	1/4

$$f(x) = 2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

ora so risolvere eq. come:

$$x^{4/3} = \pi$$

$y^{3/4}$

$$x^4 = \left(x^{4/3}\right)^3 = \pi^3$$

$$x = \pi^{3/4}$$

$$x^{\alpha} = \frac{1}{2}$$

applico l'inversa

$y^{1/\alpha}$

$$\left(x^{\alpha}\right)^{1/\alpha} = \frac{1}{2^{1/\alpha}}$$

$$\boxed{x = 2^{-1/\alpha}}$$

ma come risolvo $2^x = \pi$?