PARTO DALLA FUNZ. ESPON.:

$f(x) = a^x$ $\boxed{a>1}$

è funz. crescente su $\mathbb{R}$

a valori in $(0, +\infty) = \operatorname{Im} f$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$

$\Rightarrow f$ è invertibile e

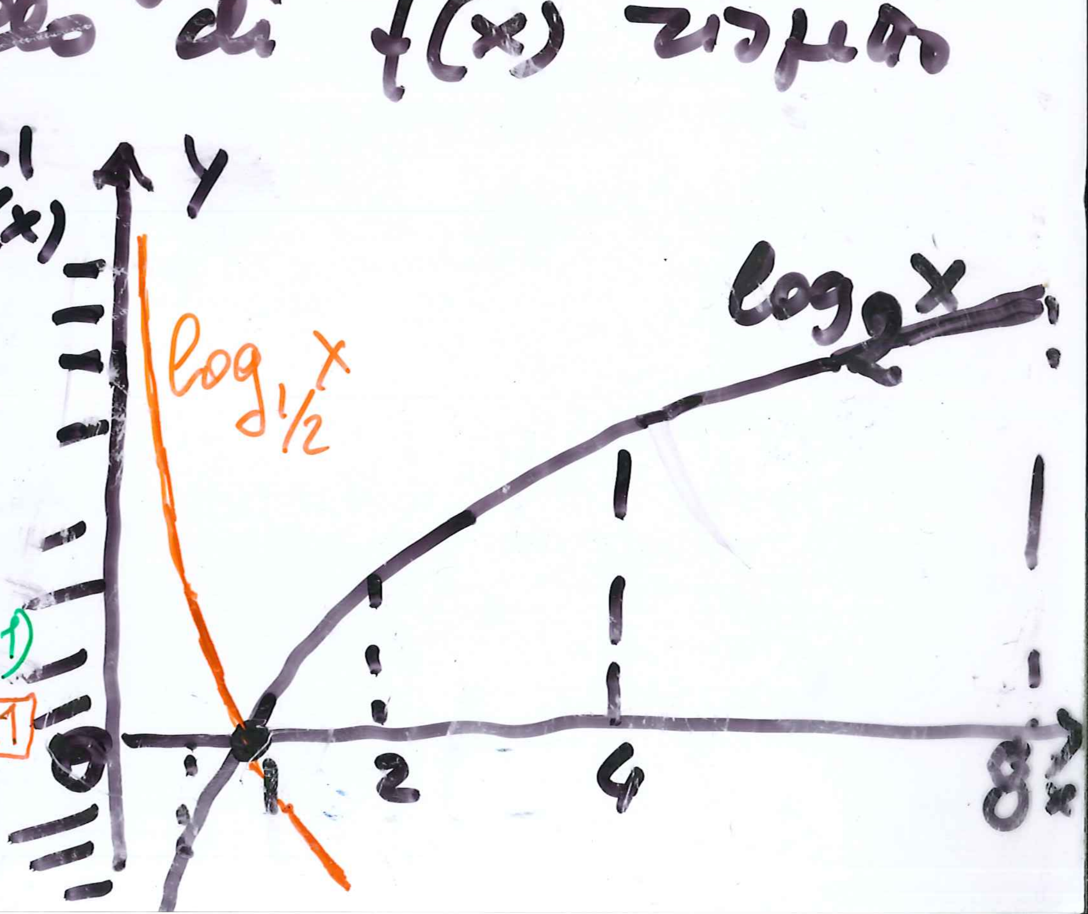
$f^{-1}: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

avrà grafico simmetrico di quello di $f(x)$ rispetto a $y = x$

Chiamo $f^{-1}(x)$ __logaritmo__ in base a di x.

In figura $\log_2 x$ $(a = 2 > 1)$

Se invece $\boxed{0<a<1}$ si ha grafico come quello di $\log_{1/2} x$



$\boxed{a>1}$ $f: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$

$f(x) = a^x$

$f^{-1}: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$f^{-1}(y) = \log_a y$

Per def. di funzione inversa:

$\forall x \in \mathbb{R} : f^{-1}(f(x)) = x$ cioè

$$\log_a (a^x) = x;$$

$\forall y \in (0,+\infty) : f(f^{-1}(y)) = y$ cioè:

$$a^{\log_a y} = y$$

cioè il $\log_a y$ è l'esponente (REALE) che devo dare ad <u>a</u> per ottenere y

$\boxed{a>1}$

In particolare useremo la f^{-1} per risolvere eq. e diseq ESPONENZIALI : $a^x \geq$ cost.

e usiamo la f per risolvere eq. e diseq logaritmiche $\log_a y \geq \text{cost}$

NOTA se $a = 1$ $a^x = 1$

$\Rightarrow$ non è invertibile

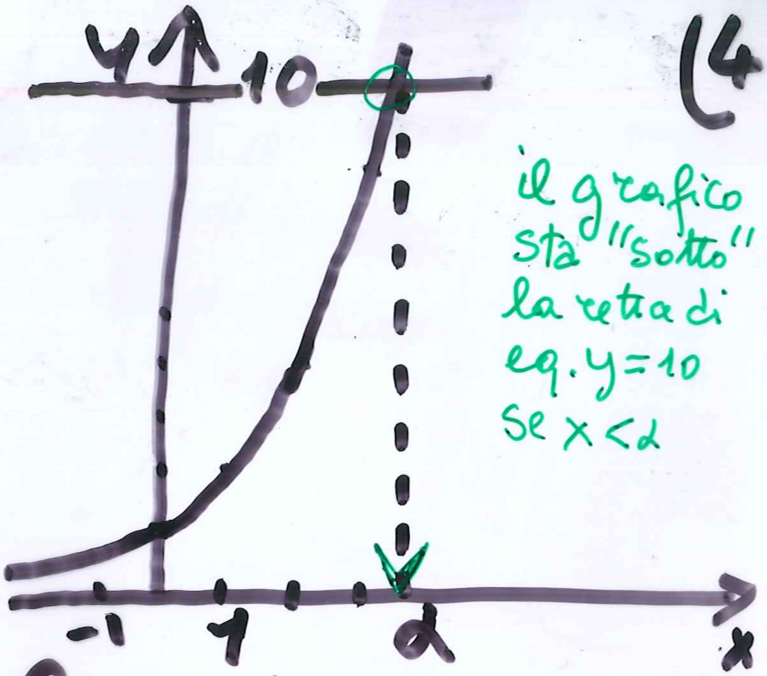
$\Rightarrow$ non esiste il "LOGARITMO di BASE 1"

$\boxed{0 < a < 1}$: $f = a^x$ è monotona decrescente $\Rightarrow$ è invertibile : $f^{-1}(y) = \log_a y$ è monotona decrescente.

Anche qui uso f^{-1} per risolvere le eq. esponenziali; la f per risolvere le eq. logaritmiche MA $a^x \geq k \Leftrightarrow x \leq \log_a k$

e: $\log_a y \geq k \Leftrightarrow y \leq a^k$

ESEMPI



il grafico sta "sotto" la retta di eq. $y=10$ se $x<\alpha$

$$2^x \leq 10$$

applico l'inversa $\log_2(\ )$

$$\underbrace{\log_2(2^x)}_{=\,x} \leq \log_2(10)$$

il verso si conserva poiché base $=2>1$

$$\Rightarrow \quad x \leq \log_2 10$$

cioè $x \leq \log_2 2 + \log_2 5 =$

$= 1 + \log_2 5$

VEDI PROPRIETÀ pag 5

$$\log_{1/3} x \leq 7$$

applico l'inversa $\left(\frac{1}{3}\right)^{(\ )}$

$$\boxed{0 < \frac{1}{3} < 1}$$

base <1, verso ribaltato

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{1/3} x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^7 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3^7}$$

Altro tipo di equazione : $a^x = b$

Se $a = 1$: • è identità $1^x = 1$
• è impossibile

Se $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ e $b \leq 0$ ... NON CI SONO SOLUZ

Se $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ e $b > 0$ l'equazione ammette una e una sola soluzione: essa si chiama LOGARITMO in BASE a di b :

$$\log_a b$$

$\boxed{a^{\log_a b} = b \qquad \log_a a^c = c}$

PROPRIETÀ

Sia: $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, $x, y \in \mathbb{R}$ $x>0, y>0$

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$
- $\log_a (x^c) = c \log_a x$
- $(\log_a b)(\log_b x) = \log_a x$
- $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x$ purché sia $x \neq 1$

DIMOSTRAZIONI ALLE PAGINE SEGUENTI
basate sull'uso della funz. inversa e le proprietà delle potenze

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$: TS

$(x>0, y>0, a>0, a\neq 1)$

DIM

È vero che

$$a^{\log_a(xy)} \overset{?}{=} a^{\log_a x + \log_a y} \;?$$

$$\begin{array}{ccccc} a^{\log_a(xy)} & \overset{?}{=} & a^{\log_a x + \log_a y} & & \\ \| & & \| & & \\ xy & & a^{\log_a x} & \cdot & a^{\log_a y} \\ & & \| & & \| \\ & & x & & y \end{array}$$

SI . c.v.d.

$\log_a 1 = 0$ perché $1 = a^0$

$\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$ perché

$$\log_a\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a y + \log_a \frac{1}{y}$$

$$\|$$

$$\log_a 1 = 0$$

7) NE SEGUE:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$$

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$$

$$\log_a x^c = c \log_a x \qquad \begin{matrix} x>0 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{matrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$a^{\log_a x^c} \overset{?}{=} a^{c\cdot \log_a x}$$

$$\begin{matrix} \| & & \| \\ x^c & & (a^{\log_a x})^c = x^c \end{matrix}$$

sì. c.v.d.

$$(\log_a b)(\log_b x) = \log_a x \quad \begin{cases} x>0 \\ a,b>0 \\ a,b\neq 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$a^{(\log_a b)\cdot(\log_b x)} \overset{?}{=} a^{\log_a x} = x$$

$$\|$$

$$(a^{\log_a b})^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x$$

sì. C.V.D

Punctă că $a>0,\ a\neq 1$
$x>0,\ x\neq 1$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

Dem.

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a} \iff$$

$$\log_a \underbrace{x \cdot \log_x a}_{=\log_a a} = 1 \quad \text{și}$$

$$\log_a x = -\log_{1/a} x$$

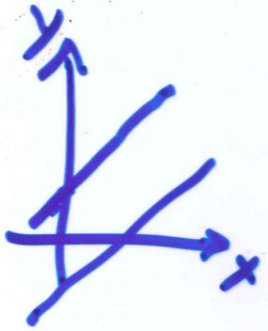
$$\Updownarrow$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ x}}{a^{\log_a x}} \overset{?}{=} a^{-\log_{1/a} x} = \underset{\substack{\parallel \\ x}}{(a^{-1})^{\log_{\frac{1}{a}} x}}$$

și

Composizione tra particolari funz. elementari.

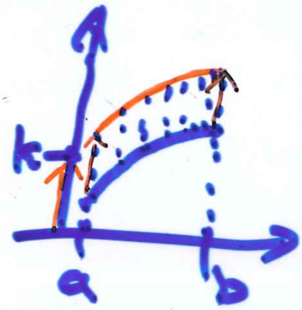
1) $f(x) = x + K$ $\quad k \in \mathbb{R}$



$g(x)$ generica

Dominio (a, b)

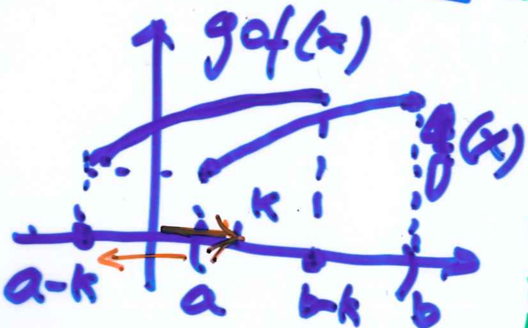
$f\circ g(x) = g(x) + K$



Si trasla nella direz. dell'asse y nel verso indicato dal segno di k di k unità

$\boxed{g\circ f(x) =}$

$= g(x+K)$



Si trasla nella direz. dell'asse x verso opposto a quello indicato dal segno di k, di k unità

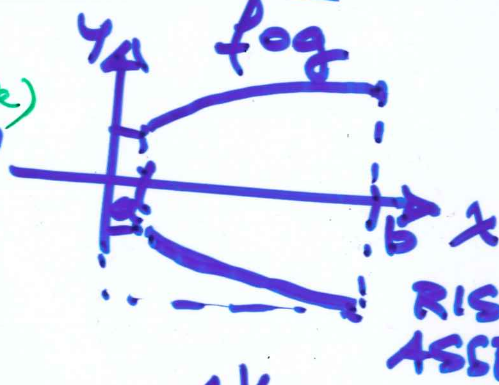
$f(x) = x + k$
TRASLAZIONE

---

2) $f(x) = -x$ SIMMETRIA (assiale)

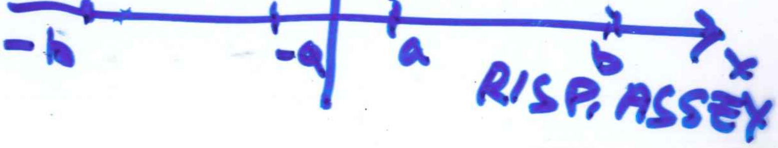
$g(x)$ generica

$f\circ g(x) = -g(x)$



RISP. ASSE X

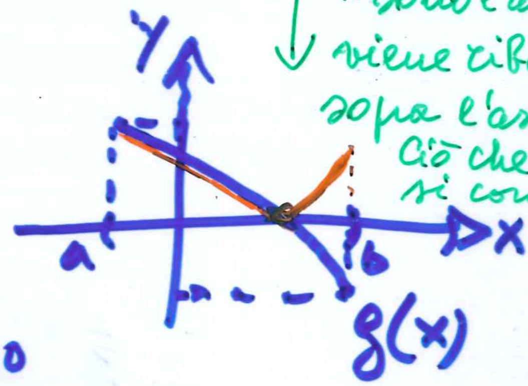
$g\circ f(x) = g(-x)$



RISP. ASSE Y

3) $f(x) = |x|$

$g(x)$ generica



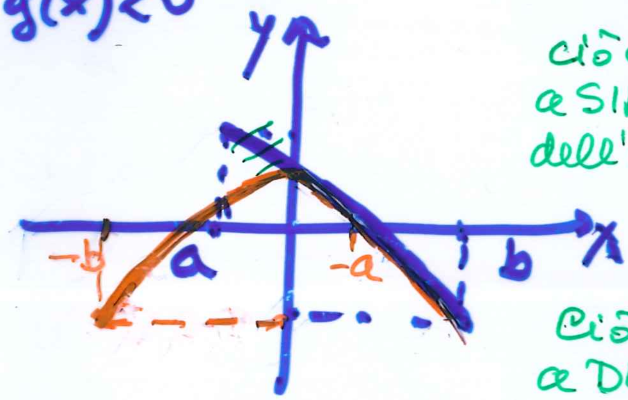
ciò che sta "sotto l'asse x" viene ribaltato sopra l'asse x. Ciò che è sopra si conserva.

$f\circ g(x) = |g(x)| =$

$$= \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{se } g(x) < 0 \end{cases}$$

$g\circ f(x) =$

$= g(|x|) =$



ciò che è a SINISTRA dell'asse y si dimentica. Ciò che è a DESTRA si conserva e viene ribaltato a sinistra

$$= \begin{cases} g(x) & \text{se } x \geq 0 \\ g(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$ INVERSIONE

$g(x)$ generica

Dopo

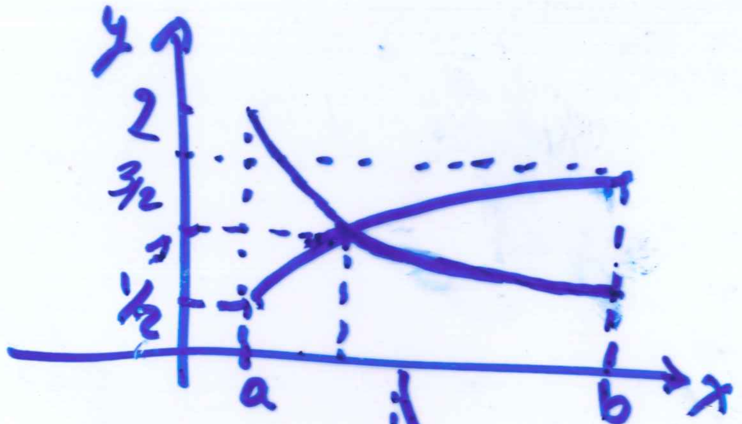
se $f(x)$ è pari e $g(x)$ qualsiasi: $g(f(x))$ è pari.

Dim. $\forall x \in I.D.$ $f(-x) = f(x)$

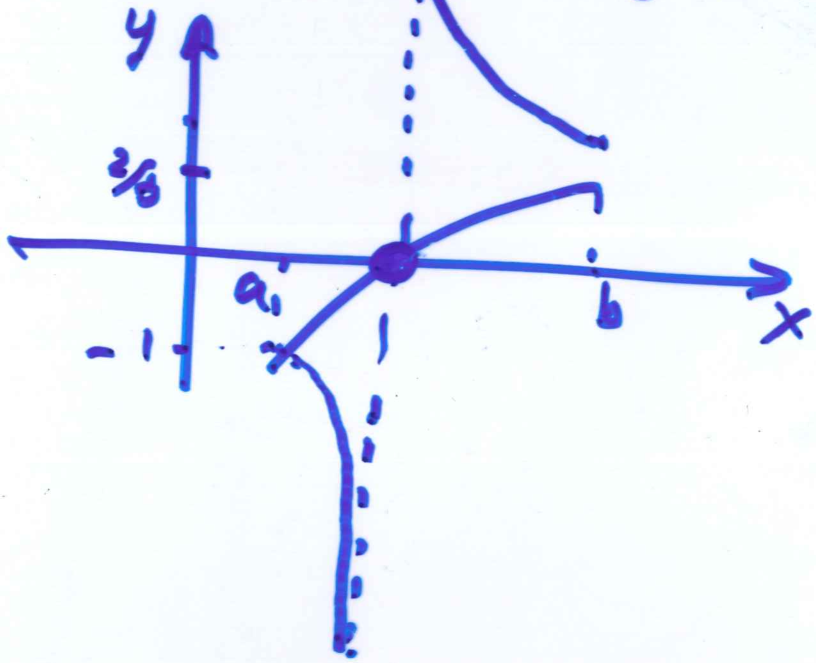
$$\Rightarrow g(f(-x)) = g(f(x))$$

Non vale l'analogo sulle dispari: $f(x) = x$...

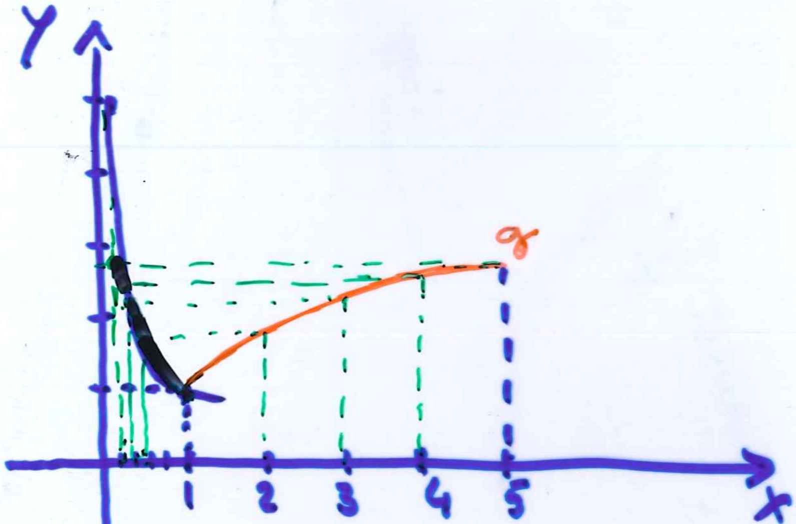
4) $f(x)=\frac{1}{x}$



$f\circ g(x)=\frac{1}{g(x)}$



$f\circ g(x)=\frac{1}{g(x)}$



attenzione: se g fosse definita in $[1,+\infty)$
$g\circ f(x)$ sarebbe definita in $(0,1]$

$g\circ f(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$

$g\circ f$ ha I.D. $\left[\frac{1}{5},1\right]$

$g\circ f(1)=g(1)$

$g\circ f\left(\frac{1}{2}\right)=g(2)$

$g\circ f\left(\frac{1}{3}\right)=g(3)$

$g\circ f\left(\frac{1}{4}\right)=g(4)$

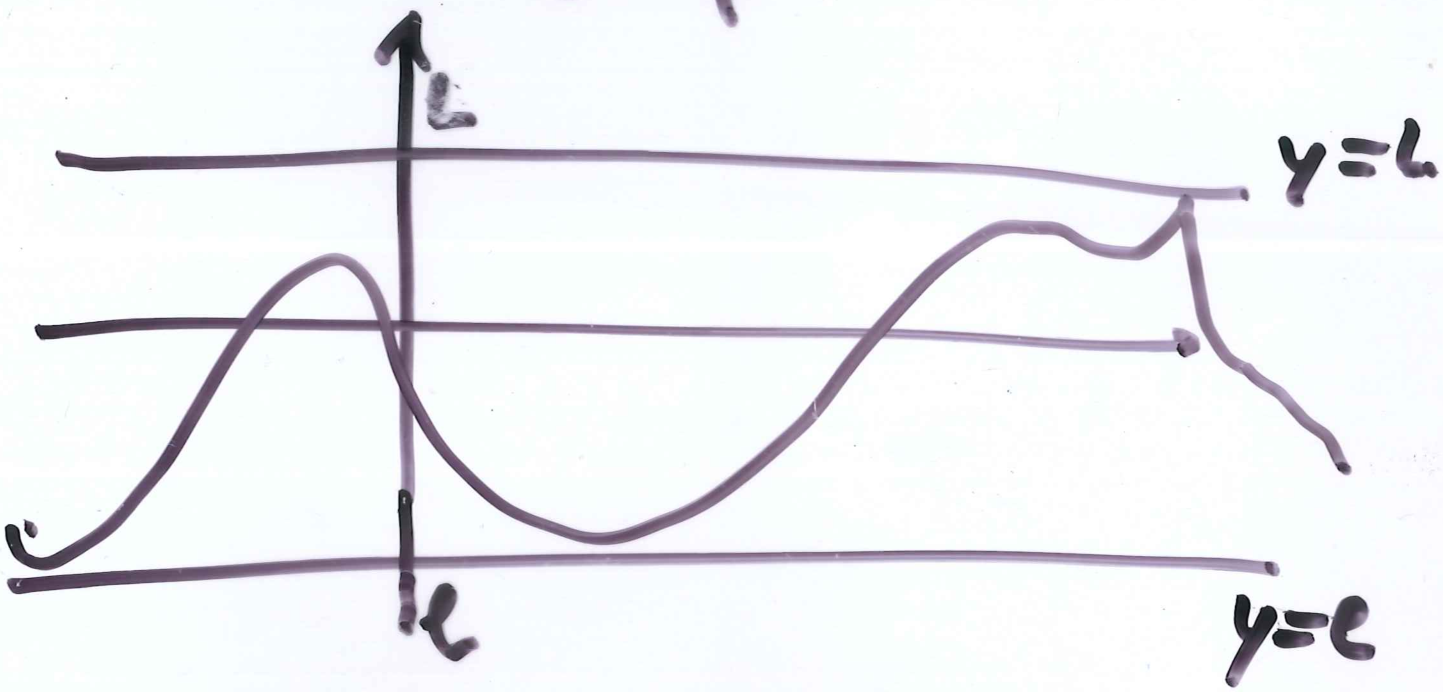
$g\circ f\left(\frac{1}{5}\right)=g(5)$ ecc.

Dico che una funzione

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$

è limitata se è limitata

$\mathrm{Im}\, f$



f superiorm. limitata se
$\mathrm{Im}\, f$ è sup. limitato

f è inferiormente limitata
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\, f$ è inf. limitato

Dire quali delle funz. fin qui studiate soddisfano tali definiz.