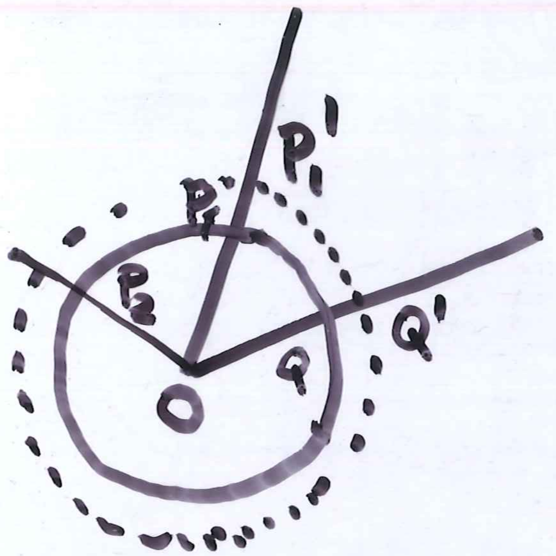


STEP 1

angolo = una delle 2 parti di piano in cui una coppia di semirette aventi origine O comune divide il piano.

Unità di misura
GRADI SESSAGESIMALI

STEP 2 (VERSO L'AFFRANCAMENTO DALL'UNITÀ DI MISURA)

Costruisco una circonf. con centro O e raggio R. Detti Q e P_1 i punti di intersezione dei lati dell'angolo con la circonferenza e P_2 il punto di intersez. della circonf con un'altra semiretta uscente da O si mostra che

$$\widehat{QOP_1} : \widehat{QOP_2} = \overset{\frown}{QP_1} : \overset{\frown}{QP_2}$$

(c'è proporzionalità tra angoli al centro e gli archi compresi: quindi se $\widehat{QOP_2} = k\widehat{QOP_1}$, $k \in \mathbb{R}$ anche $\overset{\frown}{QP_2} = k\overset{\frown}{QP_1}$.

Posso sostituire l'arco all'angolo?
In realtà no poiché la lunghezza dell'arco dipende dalla lunghezza del raggio. Ma

STEP 3

Se costruisco una circonf. di centro O e raggio $\overline{OQ'} = R'$ si vede che le due semirette OQ e OP_1 tagliano sulla circonf. punti Q' e P_1' tali che

$$\overset{\frown}{QP_1} : \overset{\frown}{Q'P_1'} = \overline{OQ} : \overline{OQ'}$$

(proporzionalità tra raggi di circonf. concentriche e archi tagliati dallo stesso angolo al centro).

Allora

$$\frac{\overset{\frown}{QP_1}}{\overline{OQ}} = \frac{\overset{\frown}{Q'P_1'}}{\overline{OQ'}}$$

cioè il rapporto tra arco e raggio è costante ed essendo il rapporto di due lunghezze è ADIMENSIONALE (non c'è unità di misura, come succedeva invece con i gradi sessagesimali).

Assumiamo questo rapporto come misura dell'angolo: misura in radianti

La traduzione tra misura degli angoli in gradi e misura degli angoli in radianti si realizza tenendo conto dello STEP 2 (proporzionalità tra angoli al centro e archi corrispondenti in una stessa circonferenza)

$$x^\circ : 180^\circ = x^{rad} : \pi^{rad}$$

(ove π è il rapporto tra lunghezza della semicirconf. e raggio).

rad	2π	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$
gradi	360	180	90	60	45	30

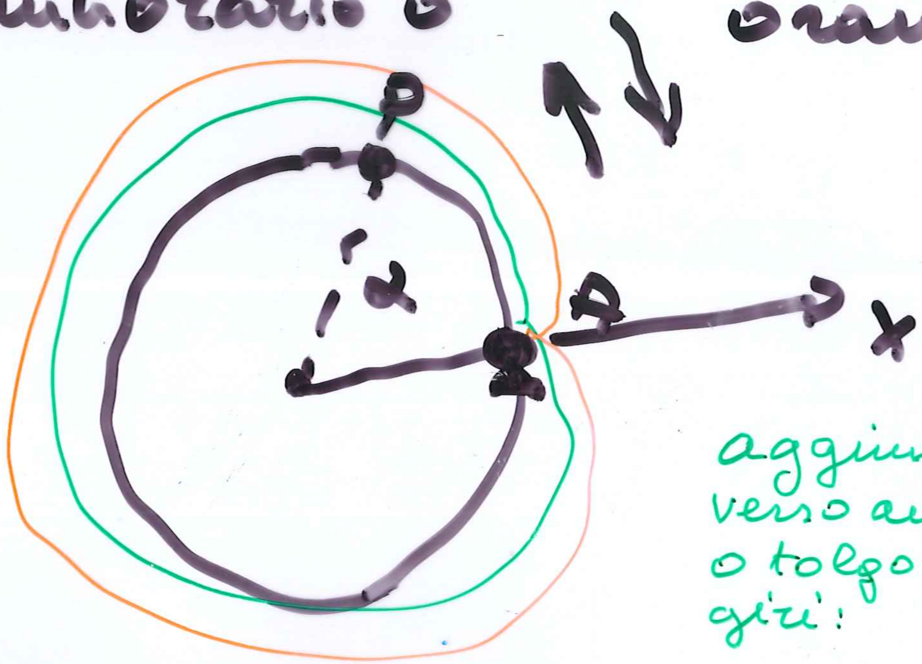
ecc.

Attenzione: 1 rad è poco meno di 60° poiché deve essere

$$x^\circ : 180^\circ = 1 : \pi$$

e π vale poco più di 3 (di fatto 1 rad corrisponde a 57°......)

Voglio descrivere non solo fatti geometrici ma anche fenomeni fisici (percorso di una pallina vincolata a un piatto rotante in verso antiorario o orario)

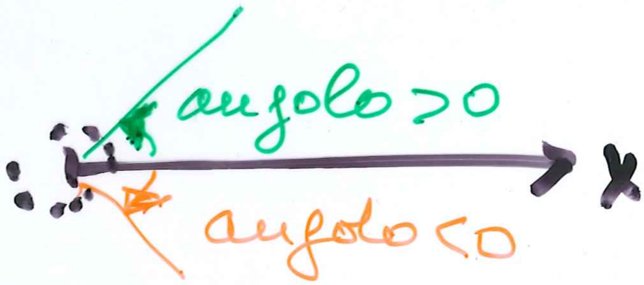


aggiungo (in verso antiorario) o tolgo angoli giri!

ANTIORARIO: $\alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$

ORARIO $\alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}^{<0}$

Analogo all'asse reale



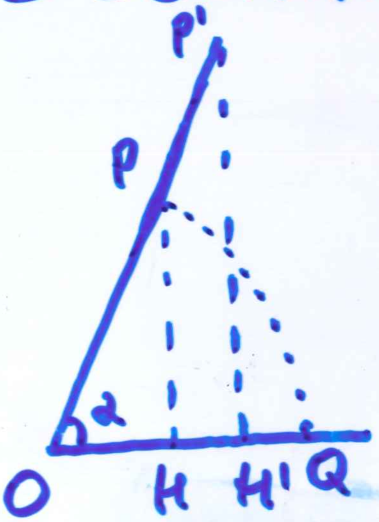
Ho così angoli di misura reale qque.

Per motivi pratici può essere più significativo individuare gli angoli con una forma di misurazione diversa (misurazione di quote di vette in montagna ecc. TRIANGOLAZIONI e altre cose che hanno a che fare con la RISOLUZIONE dei TRIANGOLI che, nella forma più semplice corrisponde a trovare gli altri lati e angoli, dati un lato e un angolo acuto in un triangolo rettangolo.

ecc.

Non ce ne occupiamo, ma di qui nasce l'esigenza di definire sen α e cos α.

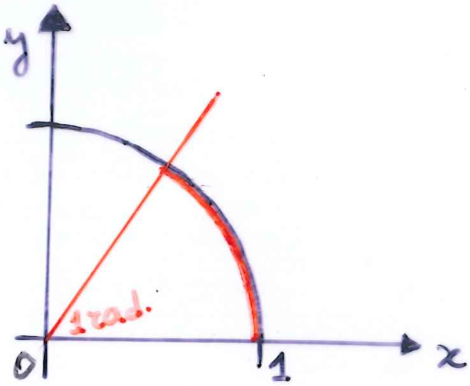
OSSERVAZIONE



Fissato l'angolo di misura α (rad) che ha lati OQ e OP, e detta H la proiez. ortogonale di P su OQ ($\widehat{OHP} = \pi/2$) si ha che $\frac{\overline{OH}}{\overline{OP}}$ e $\frac{\overline{PH}}{\overline{OP}}$ non dipendono dal punto P scelto, cioè $\overline{OH}/\overline{OP} = \overline{OH'}/\overline{OP'}$ e $\overline{PH}/\overline{OP} = \overline{P'H'}/\overline{OP'}$

Funzioni trigonometriche

hanno per argomento un angolo misurato in radianti.

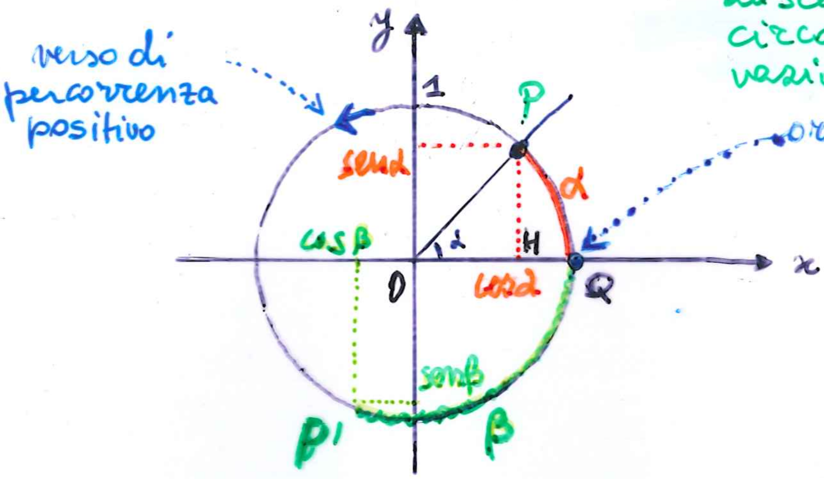


angolo piatto = rad π.
retto = rad $\frac{\pi}{2}$.

In generale per passare dalla misura in gradi α° di un certo angolo alla sua misura in radianti usare la proporzione

$$\frac{\alpha^{rad}}{\pi} = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$$

La scelta di lavorare su questa circonf. è motivata dall'osservazione a pag 5.



$\overline{OQ} = 1$

circonferenza goniometrica

$\operatorname{sen}\alpha$ = ordinata del punto P della circonferenza di raggio 1 tale che l'arco QP misuri $|\alpha|$ e P segue Q (nel verso di percorrenza positivo) se $\alpha > 0$, lo precede altrimenti

$\cos\alpha$ = ascissa dello stesso P.

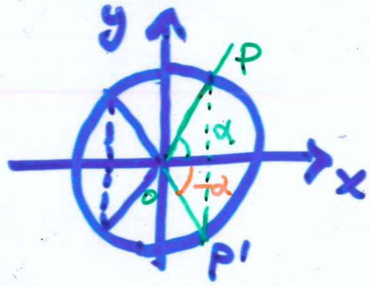
Evidentemente $|\operatorname{sen}\alpha| \le 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
$|\cos\alpha| \le 1 \quad$ "

cioè sen α e cos α sono funz. limitate

e (teor. di Pitagora) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Per il momento penso $\alpha \in (-\pi, \pi]$ ($-\pi$ escluso poiché il punto $(-1,0)$ sulla circonf. deve corrispondere a 1 sol α)

$\alpha \in [0, \pi] \Rightarrow -\alpha \in [-\pi, 0]$



Sia che l'angolo sia $\leq \pi/2$ sia che sia $> \pi/2$ si vede che $-\alpha$, essendo ottenuto tracciando la semiretta simmetrica di OP risp. all'asse x intercetta sulla circonf. un punto P' simmetrico di P risp. all'asse x $\Rightarrow$

$$P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow P' = (\cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha)$$

cioè

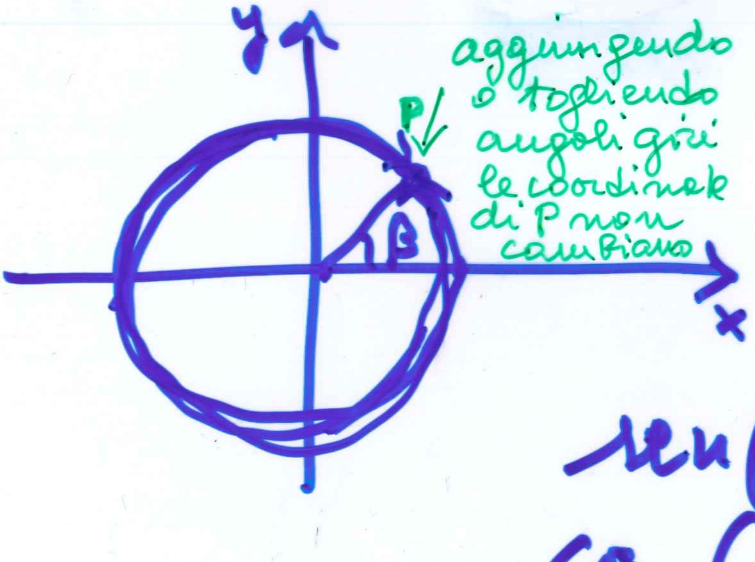
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad , \quad \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

Ovvio che lo stesso vale se parto da $\alpha \in (-\pi, 0)$ e $-\alpha \in (0, \pi)$.

$\operatorname{sen}\alpha$ è una funz. dispari
$\cos\alpha$ è una funz pari

---

se $\alpha \in \mathbb{R}$, esisterà $\beta \in (-\pi, \pi]$
t.c. $\alpha - \beta = 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$



$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$$
$$\cos\alpha = \cos\beta$$

cioè

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$$

funzioni periodiche!

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica

se $\exists\, h \in \mathbb{R}^{>0}$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x+h) = f(x)$$

se $\text{I.D.}(f) \subsetneq \mathbb{R}$ deve succedere

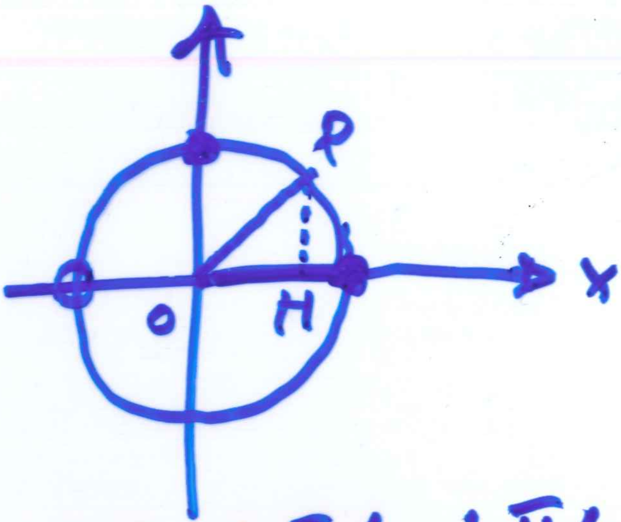
che $\exists\, h \in \mathbb{R}^{>0}$ t.c. $\forall x \in \text{I.D.}$

$$f(x+h) = f(x)$$

Nel caso di $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$, $h = 2\pi$ (notare che 2π è il più piccolo numero che realizza l'uguaglianza)

Allora ad es. $\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right) =$
$= \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$.

In generale la periodicità di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ permette di limitarsi a tracciarne il grafico in $(-\pi, \pi)$ e poi accostare tanti spezzoni uguali a quel grafico; invece la (dis)parità permette di limitarsi a trovare tale grafico in $[0, \pi]$ e ricavare per simmetria (rispetto a 1 punto o a 1 retta) il grafico anche in $(-\pi, 0)$.



	0	$\pi/2$	π	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$
sen x	0	1	0	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
cos x	1	0	-1	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$

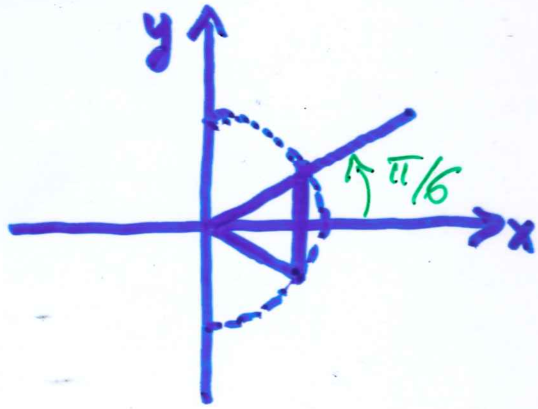
$$\overline{PH}=\overline{OH}$$

$$1=\overline{OP}^2=\overline{PH}^2+\overline{OH}^2=2\,\overline{PH}^2$$

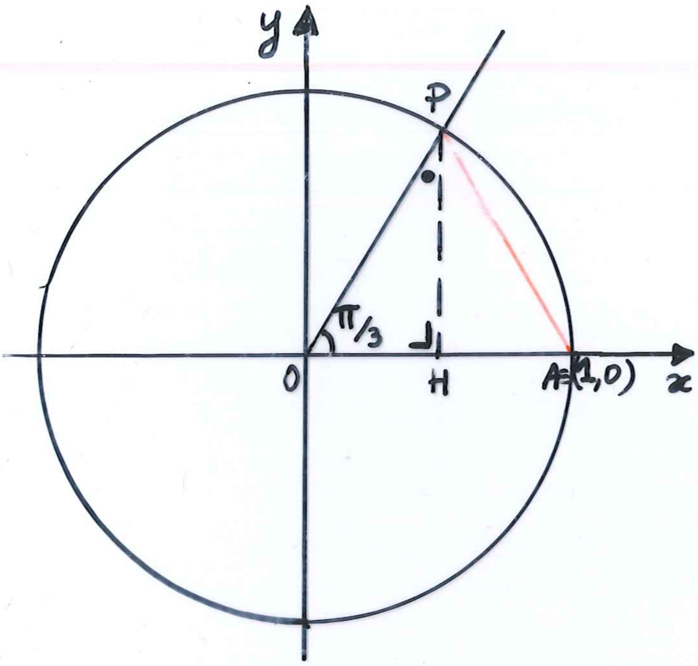
$$\Rightarrow \overline{PH}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Per $\pi/3$ e $\pi/6$ vedere le pag succ.

Per $\pi/6$ si può fare anche un ragionamento autonomo a partire da questa figura:



dove è ancora evidenziato un triangolo equilatero



$\overset{\triangle}{OPA}$ isoscele con vertice O
lati uguali

$\Rightarrow$ equilatero

$\Rightarrow$ se $\overline{OP} = 1$ allora

$\overline{OH} = 1/2$

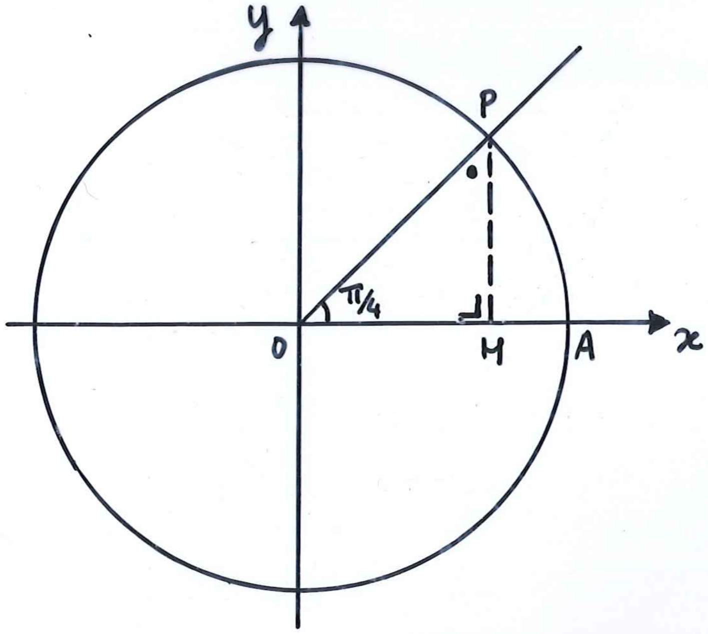
$\overline{PH} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2} =$

$= \sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = 1/2 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \sqrt{3}/2 = \cos\frac{\pi}{6}$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \sqrt{3} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}$



$\overset{\triangle}{OHP}$ isoscele con vertice H
angoli uguali

$\Rightarrow OH = PH$ e

$\overline{OP}^2 = 2\,\overline{OH}^2$

$\Rightarrow \overline{OH} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

VEDI PAG 11-12

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$: FORMULE DI ADDIZIONE $\Rightarrow$

$\cos\pi/12 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\operatorname{sen}\pi/12 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

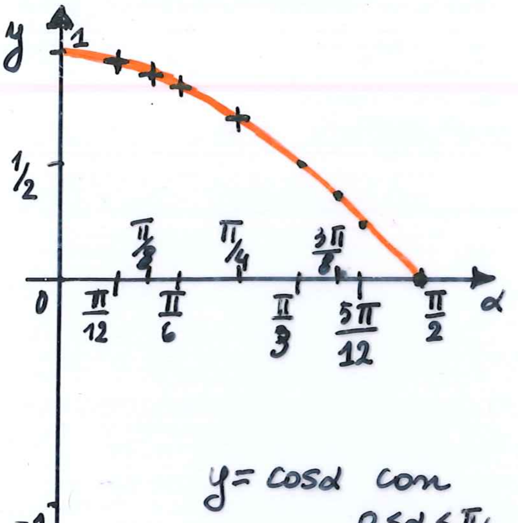
$\operatorname{tg}\pi/12 = 2-\sqrt{3}$

$\pi/8 = \frac{1}{2}\cdot\pi/4$: FORMULE DI BISEZIONE $\Rightarrow$

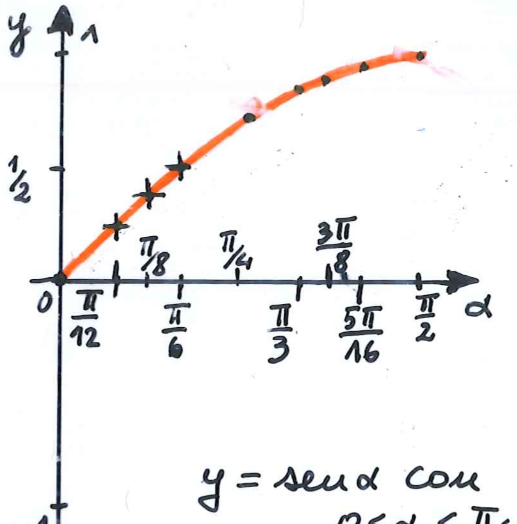
$\cos\pi/8 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\operatorname{sen}\pi/8 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$\operatorname{tg}\pi/8 = \sqrt{2}-1$

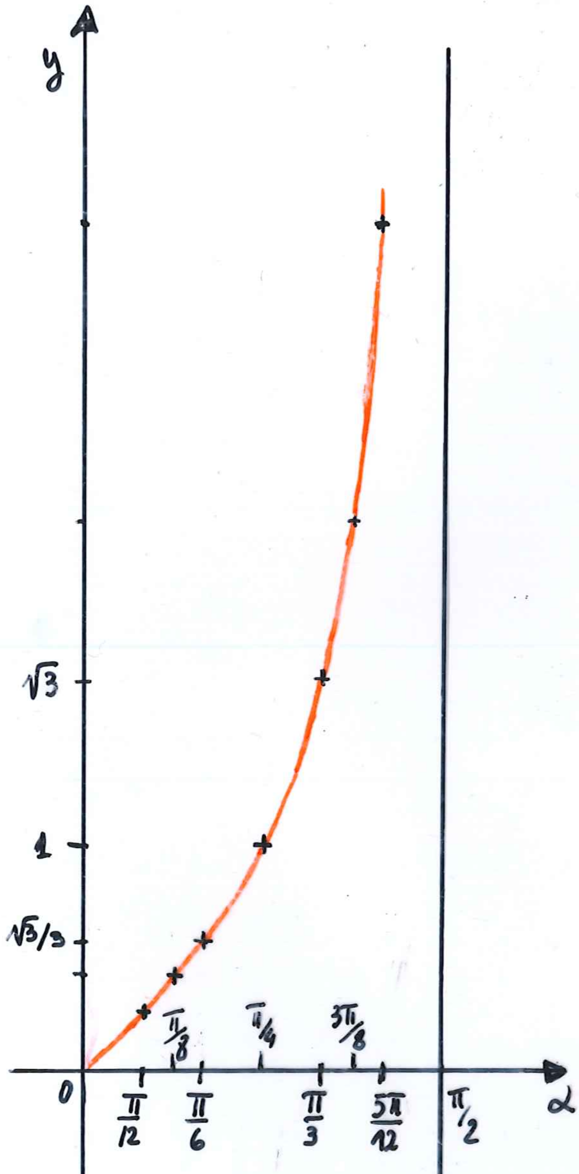


$y = \cos\alpha$ con $0 \leq \alpha \leq \pi/2$



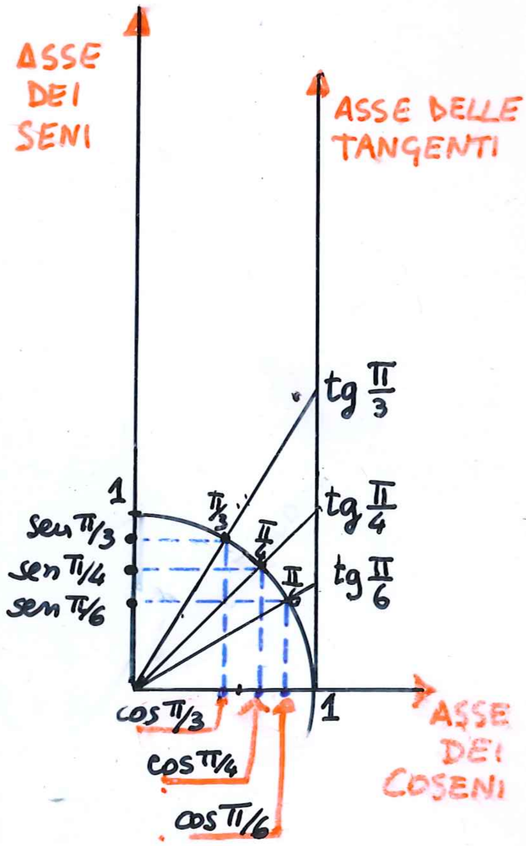
$y = \operatorname{sen}\alpha$ con $0 \leq \alpha \leq \pi/2$

Note le relasioni tra seno e coseno di angoli complementari basta ricavare 4+3 valori per avere il grafico con il dettaglio proposto Vedi pag 9 per un metodo grafico

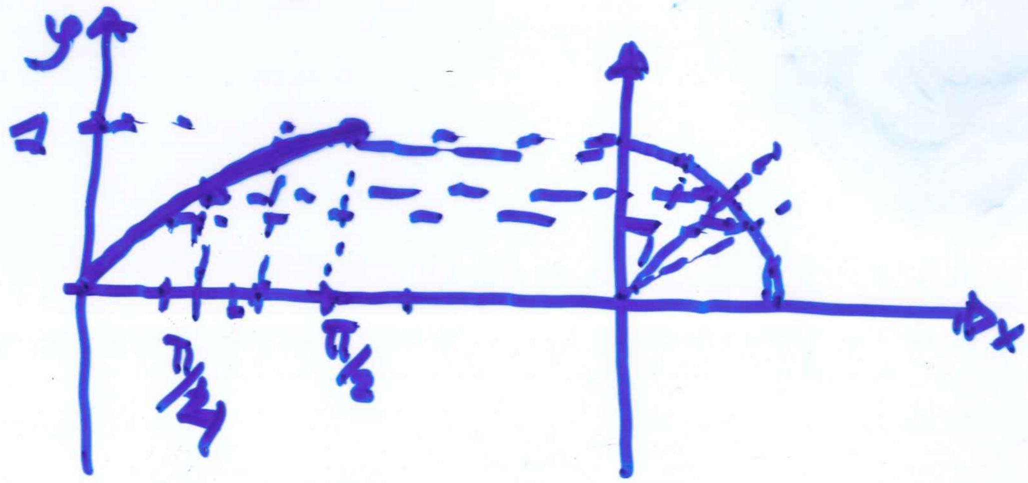


$y = \operatorname{tg}\alpha$ con $0 \leq \alpha < \pi/2$

<u>Metodo grafico</u> (senza calcoli) per trovare $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ noto α (sempre $0 \leq \alpha < \pi/2$)



Costruzione del grafico di sen x a partire dai valori delle ordinate sulla circonf. goniometrica



Se:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

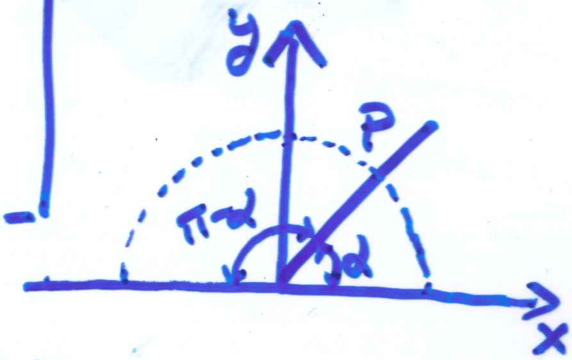
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

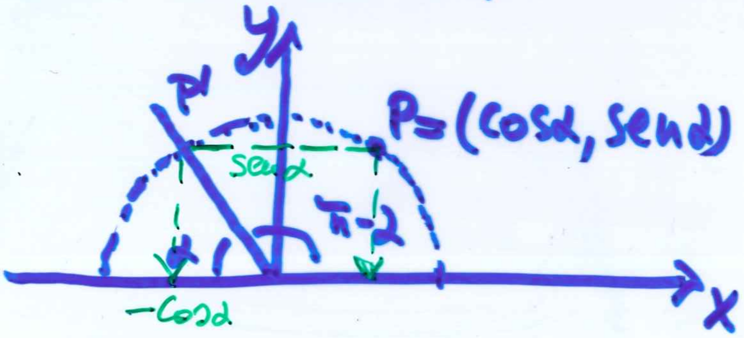
Questo spiega come lavorare sei $\frac{\pi}{6}$ e in generale su seno e coseno di angoli complementari

$$(*)\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha \\ \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$$

Infatti:



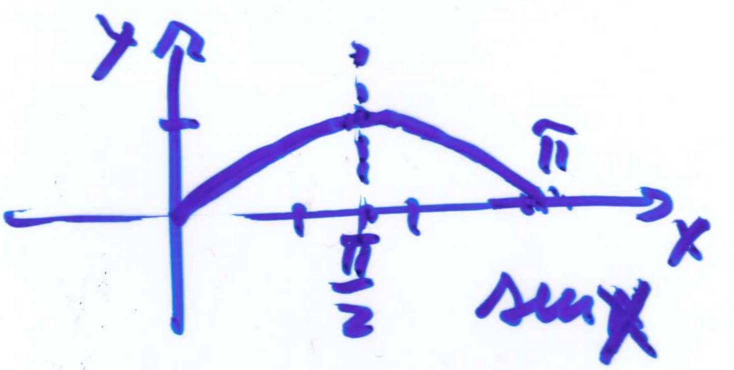
Simmetrizzo rispetto all'asse y

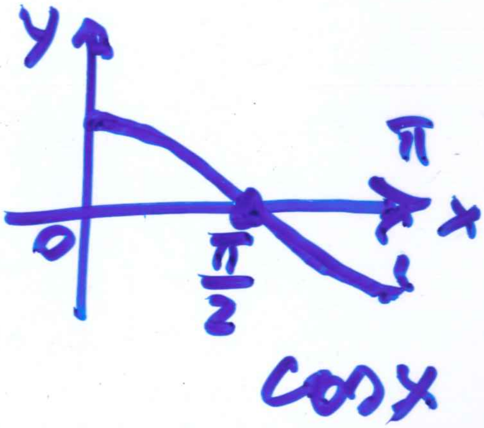


P' è simm. di P risp. ad asse y

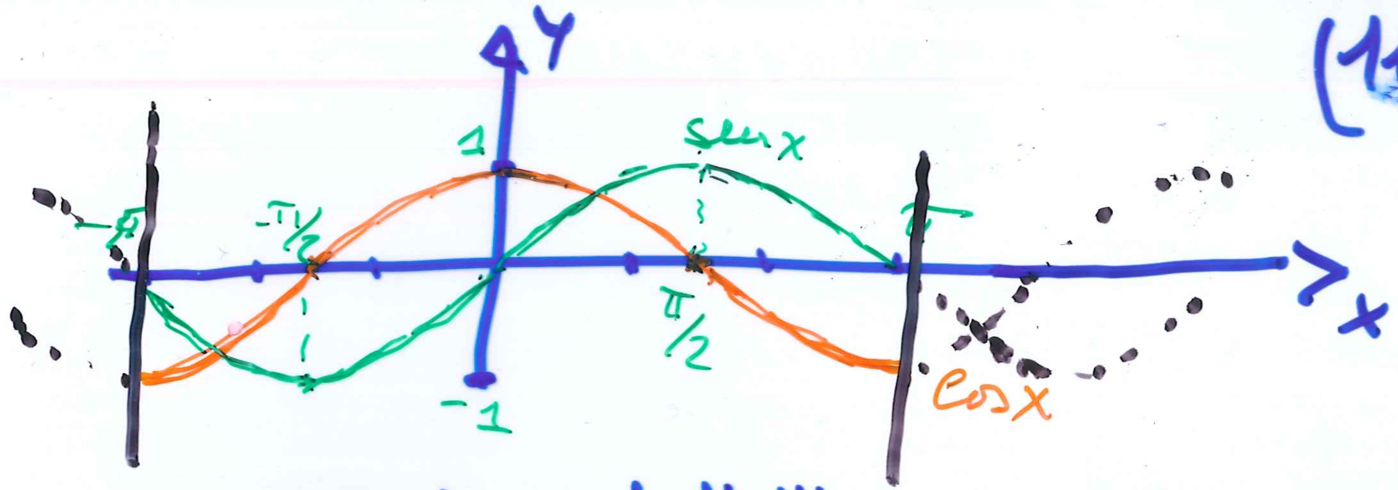
(*) la funz seno è simmetrica rispetto a $x = \pi/2$

la funz coseno è simmetrica risp. $(\pi/2, 0)$





Quindi basta conoscere i due grafici in $[0, \frac{\pi}{2}]$



usando periodicità e simmetrie si arriva a questi grafici

FORMULE di ADDIZIONE

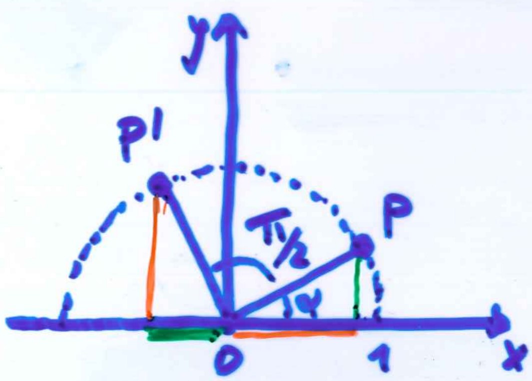
$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha$$

$$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}(\alpha+(-\beta)) =$$

$$= \text{sen}\,\alpha\cos(-\beta) + \text{sen}(-\beta)\cos\alpha =$$

$$= \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\beta\cos\alpha$$

Inoltre



$\text{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$ (vedi figura ... o formule)

$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}\,\alpha$.

Si legge: il grafico di $\cos\alpha$ si ottiene da quello di $\text{sen}\,\alpha$ traslando di $-\frac{\pi}{2}$ nella direz. dell'asse x

Ne segue:

$$\cos(\alpha+\beta) = \text{sen}\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \text{sen}\,\alpha\cos\left(\beta+\pi/2\right) + \text{sen}\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\cos\alpha =$$

$$= -\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + \cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \ldots\ldots$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha =$$
$$= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha =$$
$$= (\cos\alpha)^2 - (\operatorname{sen}\alpha)^2 =$$

$$\boxed{(\operatorname{sen}\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1} \quad = 1-2(\operatorname{sen}\alpha)^2$$
$$= 2(\cos\alpha)^2 - 1$$

FORMULE di BISEZIONE

$$(\cos\alpha)^2 = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\ldots}$$

$$(\operatorname{sen}\alpha)^2 = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\ldots}$$

ATTENZIONE alla scelta del segno