la funzione $\operatorname{sen} x$ è crescente in ciascuno degli intervalli

$$\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \quad k\in\mathbb{Z}$$

è decrescente in

$$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right) \quad k\in\mathbb{Z}$$

la funz. $\cos x$ è crescente in ciascuno degli intervalli

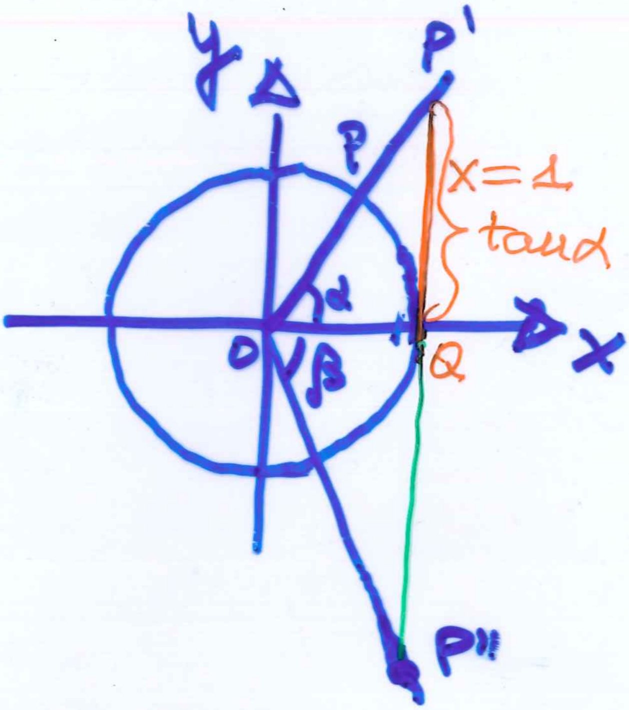
$$\left(-\pi+2k\pi,\ 0+2k\pi\right) \quad k\in\mathbb{Z}$$

è decrescente in

$$\left(0+2k\pi,\ \pi+2k\pi\right) \quad k\in\mathbb{Z}$$

(Lo si vede sul grafico ed è conseguenza del fatto che $\operatorname{sen} x$ presenta simmetria assiale rispetto a ogni retta della forma $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ e simmetria ~~centrale~~ centrale rispetto a ogni punto del tipo $(k\pi,0)$ e che $\cos x$ presenta simmetria assiale rispetto alle rette della forma $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ e centrale rispetto ai punti $(\pi/2+k\pi,0)$, $k\in\mathbb{Z}$).

Passiamo ora alla def. e studio della funzione TANGENTE di un angolo α.



se $\alpha \in [0, \pi/2)$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{P'Q}}{\overline{OQ}}$$

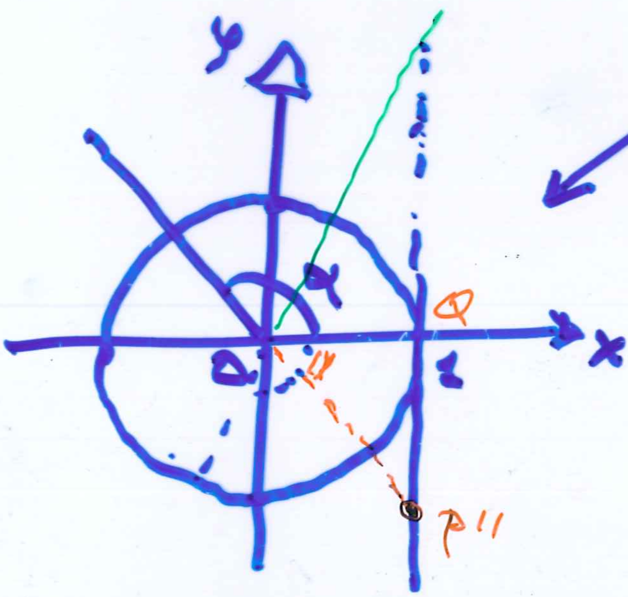
se $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$\tan\beta = \frac{-\overline{OP''}}{\overline{OQ}} =$$

$$= \frac{\text{ordinata di } P''}{1}$$

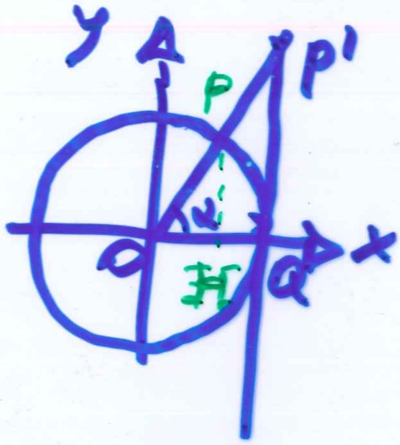
Così ho def $\tan\alpha$ con $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

E se $\alpha \in (\pi/2, \pi]$?



definisco la $\tan\alpha$ come l'ordinata del punto di intersez. (P'') della retta di eq. $x=1$ (tangente in Q alla circonferenza) con il prolungamento del II lato dell'angolo α (il I essendo la semiretta delle x positive).

Idem per $\alpha \in (-\pi, \pi/2)$



Osservo ora che:

$$\tan\alpha = \frac{\text{ordinata di } P'}{1}$$

$$\frac{\overline{P'Q}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} =$$

$$= \frac{\overline{PH}/\overline{OP}}{\overline{OH}/\overline{OP}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

(Similitudine di triangoli)

Informazioni conseguenti:

- I.D. $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi ,\ k \in \mathbb{Z} \}$

  poiché $\cos\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$
  $k \in \mathbb{Z}$

- periodicità:

  $$tg(x+2\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+2\pi)}{\cos(x+2\pi)} = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = tg\,x$$

è vero che $h = 2\pi$ è "il più piccolo numero reale t.c. $tg(x+h) = tg\,x$"?
NO! Infatti

$$tg(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen}x}{-\cos x} = tg\,x$$

dirò che $\tan x$ ha periodo π, mentre $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ han per. 2π.

Esercizio

$\operatorname{sen} 2x$ ha periodo π.

Infatti dire $\operatorname{sen} 2x$ significa che si compone così:

$$x \xmapsto[2\cdot(\,)]{} 2x \xmapsto[\operatorname{sen}(\,)]{} \operatorname{sen} 2x$$

Quindi:

$$x+\pi \xmapsto[2\cdot(\,)]{} 2(x+\pi) = 2x+2\pi \xrightarrow[\operatorname{sen}(\,)]{} \operatorname{sen} 2x$$

certamente $h=\pi$ dà un periodo "ragionevole"

E' il minimo possibile?

Se $0<h<\pi$ fosse un periodo per $\operatorname{sen} 2x$ significherebbe

$$\operatorname{sen} 2(x+h) = \operatorname{sen} 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sen}(2x+2h) = \operatorname{sen} 2x \quad (*)$$

Poiché:

$\forall t \in \mathbb{R}$ t può essere visto come $2x$ (prendere $x=\frac{t}{2}$)

da $(*)$ si deduce $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen}(t+\underline{2h}) = \operatorname{sen} t$$

ma, avendo $\operatorname{sen} t$ periodo 2π, non $\exists\, 2h \in (0,2\pi)$ con tale proprietà.

Torno alle conseguenze del fatto che $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

- $$\tan(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\tan x$$

$\tan x$ è una funz. dispari

- $\tan(x+y) =$ se $\begin{cases} x+y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x}{\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} =$$ dividido per $\cos x \cos y$

$$= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \quad (*)$$

---

rad	0	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$
tan	0	—	1	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$

$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2}$ $\quad$ $\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}$

$(*) \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}$

lez preced.

geometricamente (vedi slide 47ter)
o con ragionamenti sulla monotonia di funz composte (*) vedo che
$\tan x$ è crescente in $[0, \pi/2)$

Dato che $\tan x$ è dispari
sarà cresc. anche in $(-\pi/2, 0)$
e quindi lo è in
$$(-\pi/2, \pi/2)$$

Per periodicità lo è in ogni intervallo su cui è definita.

(*) in $[0, \pi/2)$ $\cos x$ decresce
$\frac{1}{y}$ decresce $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos x}$ cresce (composta delle due)

$\operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\cos x}$: sono entrambe crescenti e > 0
$\Longrightarrow$ il prod. è cresc.

Vedi dim. a pag 7

$0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$

Nell'intervallo $(0, \pi/2)$ $\operatorname{sen} x$ cresce:

$$\operatorname{sen} x_1 < \operatorname{sen} x_2$$

$\cos x > 0$ (compatibilità)

$$\operatorname{sen} x_1 \cdot \frac{1}{\cos x_1} < \operatorname{sen} x_2 \cdot \frac{1}{\cos x_1}$$

$$\frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$$

poiché $\frac{1}{\cos x}$ cresce in $(0, \pi/2)$

$\operatorname{sen} x > 0$ in $(0, \pi/2)$

$$\operatorname{sen} x_2 \cdot \frac{1}{\cos x_1} < \operatorname{sen} x_2 \cdot \frac{1}{\cos x_2}$$

$\Rightarrow$ (terzo pr. transitiva)

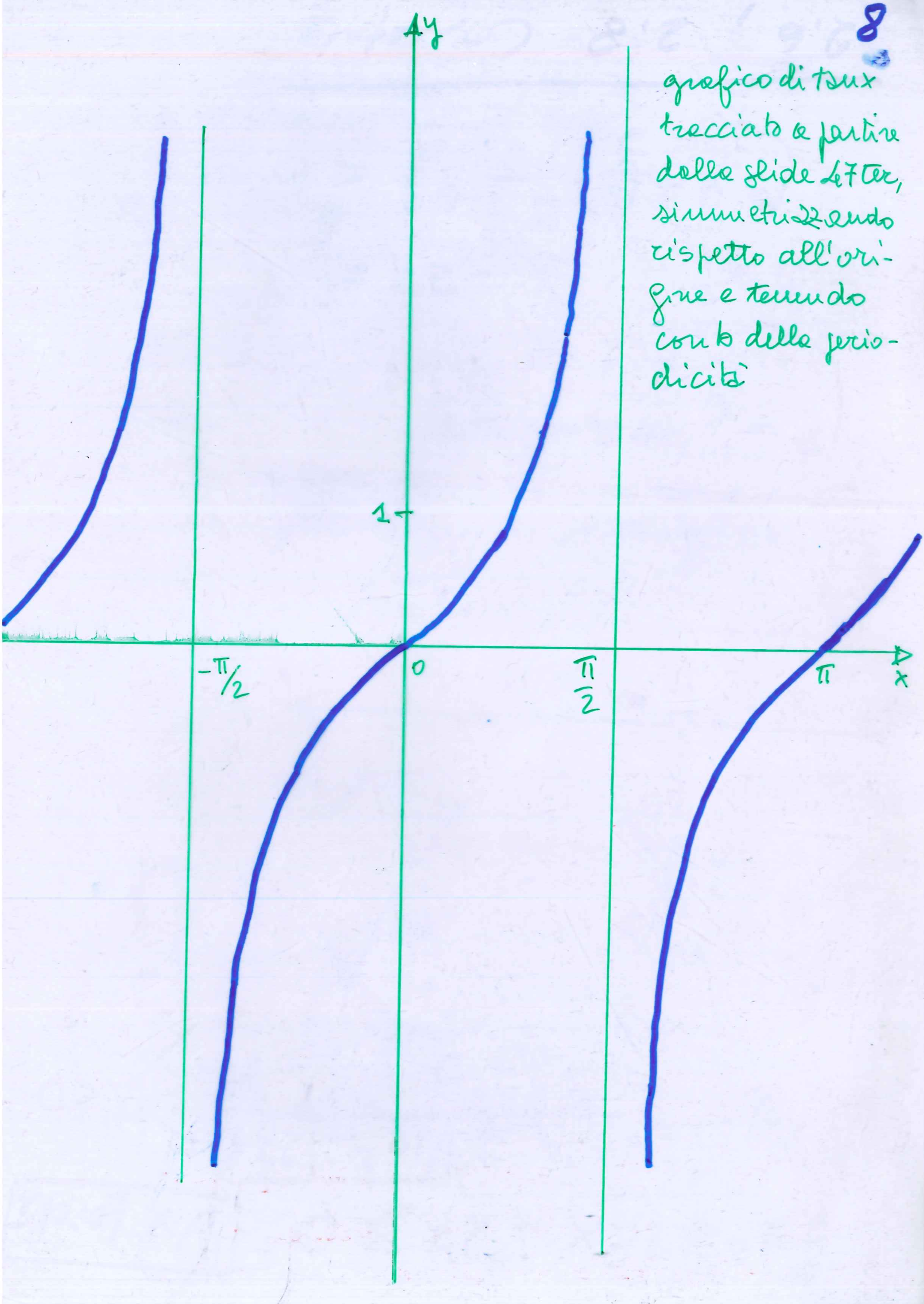
$$\operatorname{sen} x_1 \cdot \frac{1}{\cos x_1} < \operatorname{sen} x_2 \cdot \frac{1}{\cos x_2}$$

abbiamo usato la stessa tecnica che si usa per provare che

se $0 < a < b$ e $0 < c < d$

allora $ac < bd$

grafico di tan x tracciato a partire dalla slide 47ter, simmetrizzando rispetto all'origine e tenendo conto della periodicità



PROBLEMA

- Risolvere l'equazione

$$\operatorname{sen} x = 2$$

sol : $\emptyset$

- $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ ci sono 2 soluzioni $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

sull'asse reale ci sono infinite soluzioni della forma

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

- $\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{2\pi}{3}$ $x = -\frac{2\pi}{3}$ in $(-\pi, \pi]$

sull'asse reale:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

E in generale?

Per risolvere un'equazione $f(x)=k$ cerco di invertire la funz. f là dove è possibile.

Per le funz periodiche $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ non è possibile pensare a inverse che lavorino su tutto l'I.D. . Ad es.

$$\tan x = 1$$

in $(-\pi/2, \pi/2)$, $x = \frac{\pi}{4}$

ma per periodicità $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Dovrò invertire sui singoli intervalli di monotonia, vedi pag 1 per $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

Per $\tan x$ si è invece visto a pag 6 ss. che è crescente in ogni intervallo su cui è definita $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

$f(x) = x^\alpha$ A= B=

$f(x) = 2^x$

$f(x) = a^x$

$f(x) = \text{sen}\, x$??

TEOREMA: $f: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ è invertibile se e solo se è BIUNIVOCA cioè

$\forall x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (INIETT.)

$\forall y \in B \Rightarrow \exists x \in A$ t.c. $f(x) = y$. (SURIETT)

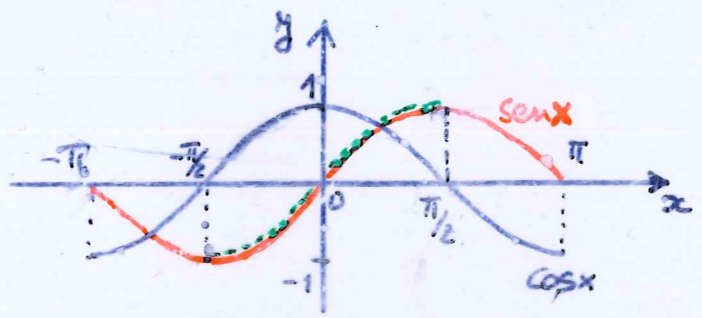
Tutte le funzioni trigonometriche sono periodiche

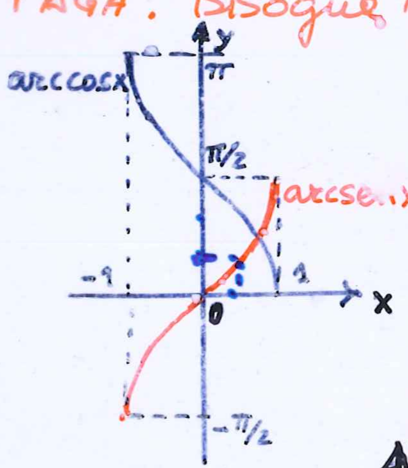
$\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen}\, x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\text{tg}(x + k\pi) = \text{tg}\, x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ e quindi non iniettive

Dunque l'inversione SI PAGA. Bisogna restringere il dominio

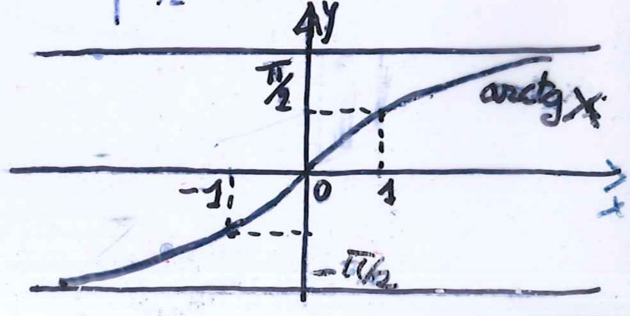


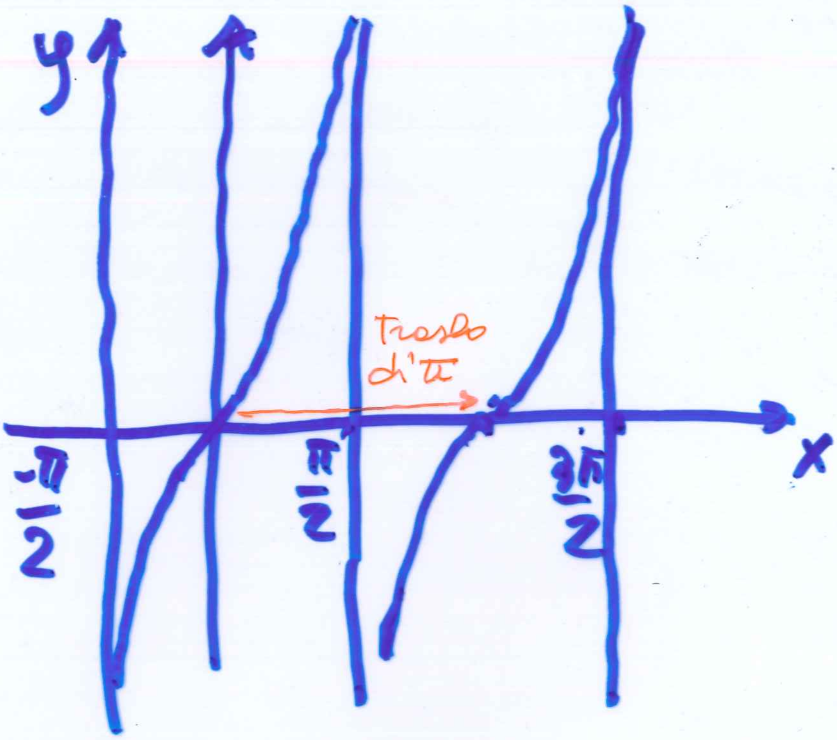


arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$

arcsen : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

arctg : $\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$

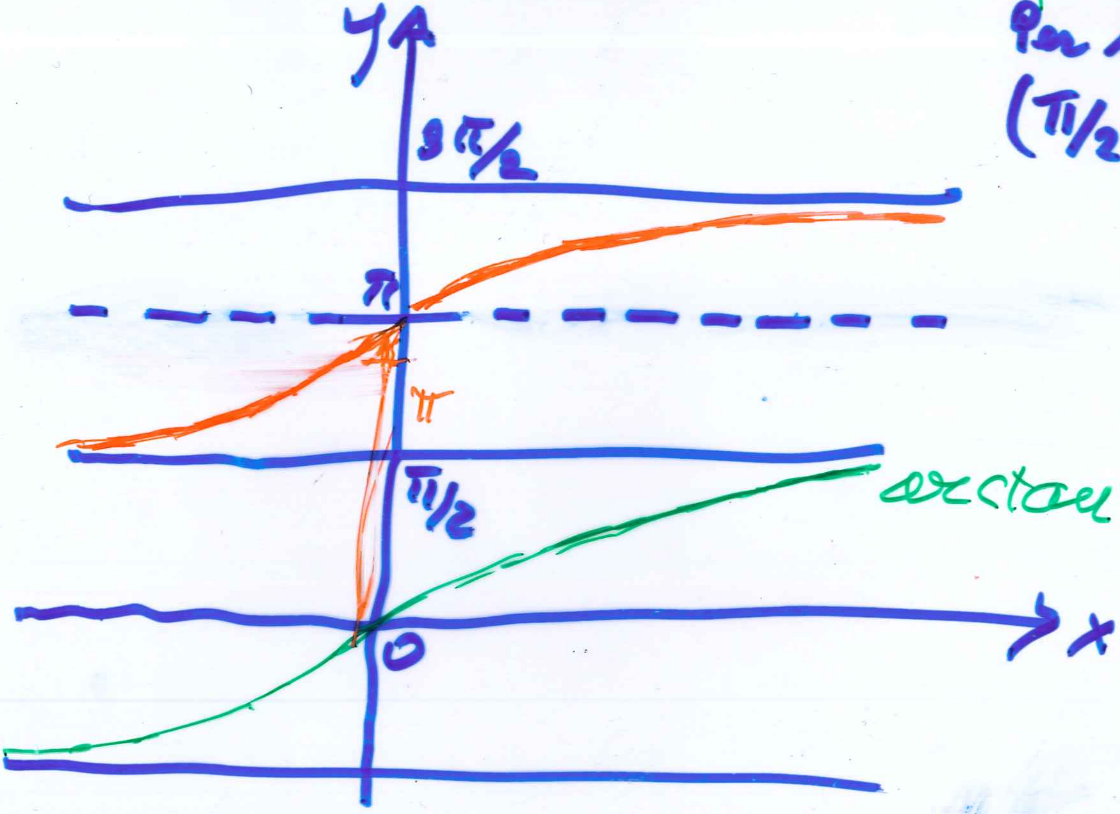




tan x.
Per invertire in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ si usa la funz. arctan x, definita su $\mathbb{R}$ a valori in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

VEDI F9 e grafico verde qui sotto

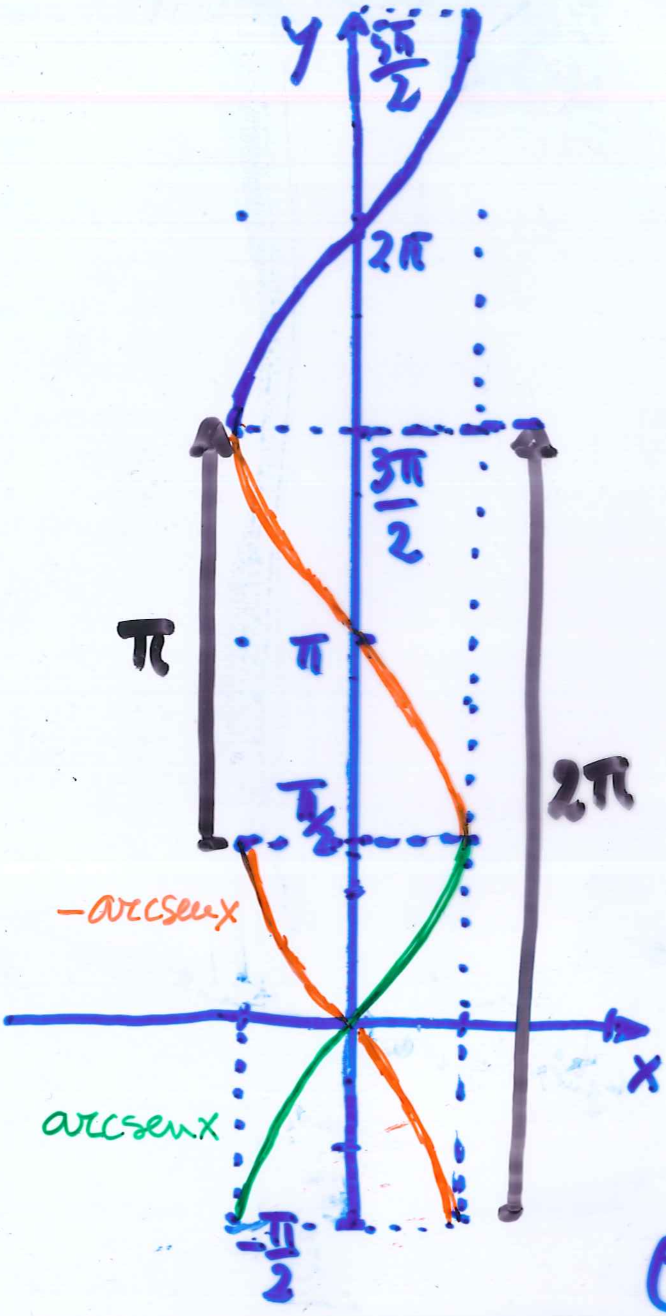
Per invertire in $(\pi/2, 3\pi/2)$ invece:



guardare come il grafico rosso è ottenuto da quello verde

$$g(x) = \arctan x + \pi$$

in generale per invertire in $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ uso $h(x) = \arctan x + k\pi$



da $\frac{3\pi}{2}$ a $\frac{5\pi}{2}$

come funz inversa di sen x posso prendere come inversa

$g(x) = \text{arcsen}\, x + 2\pi$

In generale, per invertire sen x in $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ prendo

$h(x) = \text{arcsen}\, x + 2k\pi$

(TRASLAZ di multipli di 2π)

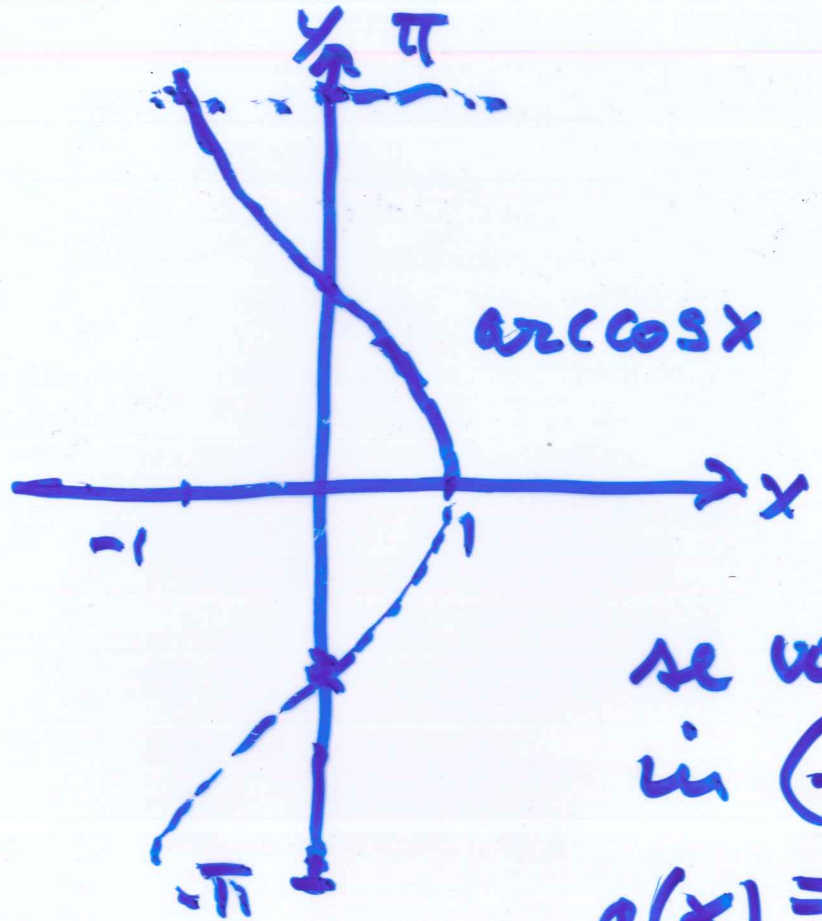
Invece per invertire sen x in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, tenuto conto della simmetria del grafico di sen x rispetto a $x = \pi/2$ prendo la funzione:

$$g(x) = \pi - \text{arcsen}\, x$$

In $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$ come inversa:

$$h(x) = \pi + 2k\pi - \text{arcsen} x$$

Similmente per $\cos x$



se voglio l'inversa in $(-\pi, 0)$

$$g(x) = -\arccos x$$

in $(-\pi + 2k\pi, 2k\pi)$:

$$h(x) = 2k\pi - \arccos x$$

N.B. Dire che voglio l'inversa di $\cos x$ in $[-\pi, 0]$ significa che voglio la funz.

$$g : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi, 0]$$

t.c. $\quad g(\cos x) = x \quad \forall x \in [-\pi, 0]$

e $\quad \cos(g(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$

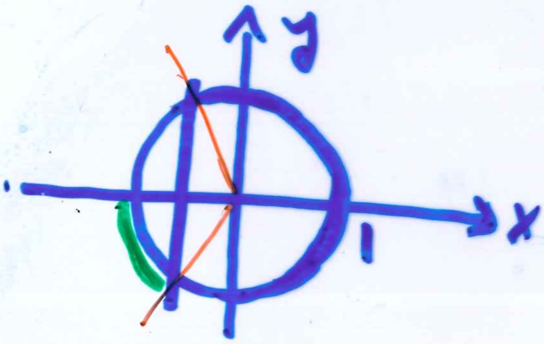
Analogamente per tutti i casi visti finora

Es.

Cercare le soluzioni di

$$\cos\alpha < -\frac{1}{2}$$

con $\alpha \in (-\pi, -\pi/2)$, e quindi <0



Traccio la circonf. goniom. e la retta $x = -\frac{1}{2}$

sono soluzioni gli angoli che tagliano sulla circonferenza punti che stanno a sinistra della retta $x = -1/2$ ($x = \cos\alpha$!) e al di sotto dell'asse x.

Risolvo prima l'equazione $\begin{cases} \cos\alpha = -1/2 \\ -\pi < \alpha < -\pi/2 \end{cases}$

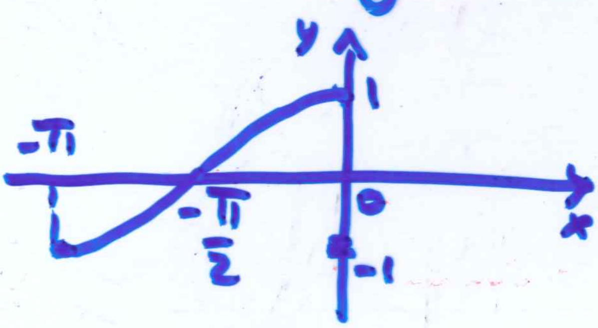
$$\begin{cases} \alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ -\pi < \alpha < -\pi/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{2\pi}{3}$$

se devo avere $\begin{cases} \cos\alpha < -\frac{1}{2} \\ -\pi < \alpha < -\pi/2 \end{cases}$

devo prendere

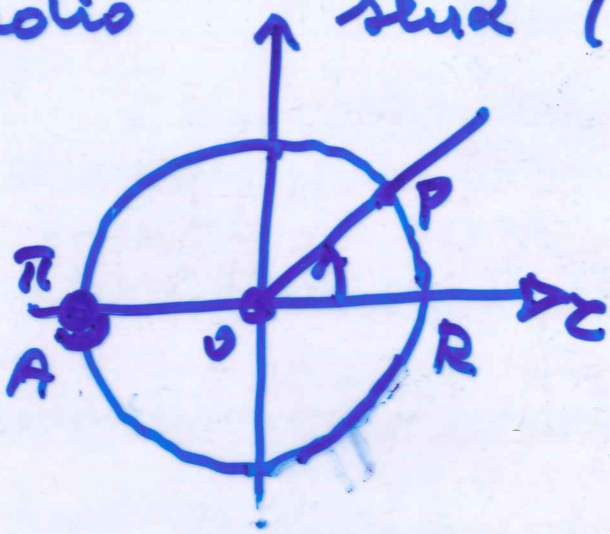
$-\pi < \alpha < -\frac{2}{3}\pi$: posso vederlo sul disegno della circonferenza goniometrica (arco verde) oppure osservare che in $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ $\cos x$ è funzione crescente e quindi anche la sua inversa $g(x)$ lo è $\Rightarrow$



$-1 \leq \cos\alpha < -\frac{1}{2} \Rightarrow g(-1) < g(\cos\alpha) < g(-\frac{1}{2})$

cioè $-\pi < \alpha < -2\pi/3$

perché togliere $-\pi$ dall'intervallo su cui studio $\operatorname{sen}\alpha$ (o $\cos\alpha$)?



Voglio corrisp $1 \leftrightarrow 1$ tra angoli e punti della circonf.

$$(-\pi, \pi] \longrightarrow (A, A]$$