Numeri Complessi

$x^2+1=0$?

"Aggiungiamo" ai numeri reali un SIMBOLO: i

All'incirca: polinomi nell'indeterminata i:

$$\sqrt{2} + 2i - 7i^2 + \frac{1}{\pi} i^3 \quad \dots$$

Ma poniamo

$$\boxed{i^2 = -1}$$
$$i^3 = i \cdot i^2 = -i$$
$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 .$$

$\mathbb{C}$: insieme delle scritture $a+ib$ con $a,b \in \mathbb{R}$

- due numeri complessi sono uguali se

$$a+ib = a'+ib' \iff \begin{array}{l} a=a' \\ b=b' \end{array}$$

$z=a+ib$: chiamo a PARTE REALE di z : $\operatorname{Re} z$ e b PARTE IMMAGINARIA di z : $\operatorname{Im} z$

- $(a+ib)+(c+id) = (a+c) + i(b+d)$

- $(a+ib)\cdot(c+id) = ac + i\,ad + i\,bc + i^2 bd = \quad i^2=-1$
$= ac - bd + i\,(ad+bc)$

PROPRIETA': le solite algebriche.

zero: $0+0i = 0$

unità: $1+0i$ Infatti: $(a+ib)(1+0i) = a-0+i(0+b) = a+ib.$

$-(a+ib) = -a-ib$

$$(a+ib)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\, i$$

C1.1

$$\sqrt{2} + 2i - 7i^2 + \frac{1}{\pi} i^3 + 15 i^4 =$$

$$= \sqrt{2} + 2i + 7 - \frac{1}{\pi} i + 15 =$$

$$= \underbrace{(\sqrt{2} + 22)}_{a} + i \underbrace{\left(2 - \frac{1}{\pi}\right)}_{b}$$

$z = a + ib \qquad a, b \in \mathbb{R}$

è la scrittura in forma algebrica del numero complesso

a =: parte reale di z = $\operatorname{Re} z$

b =: parte immaginaria di z = $= \operatorname{Im} z$

$z_1 = z_2$? $\Leftrightarrow$ hanno ugual parte reale e " " imm.

per cercare l'inverso di un num. complesso $\neq 0$ penso a cosa facevo con numeri reali come:

$x = 1 + \sqrt{2}$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})} =$$

Tratto "i" come $\sqrt{2}$; vedi pag C1.2

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = -1 + \sqrt{2}$$

$$z = a + ib \neq 0 + 0i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} =$$

$$= \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2} = \frac{a-ib}{a^2-(-b^2)} =$$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo

è ordinato? No perché non riesco a dare un ordinamento totale compatibile con il prodotto e la somma

Se esistesse $>$ potrei confrontare $0+1i$ con 0. $0+1i \neq 0$. Quindi

$\underline{0+1i > 0}$ o $\underline{0+1i < 0}$

$$\Downarrow$$

$$-1 = (0+1i)\cdot(0+1i) > (0+1i)\cdot 0 = 0$$

$$-(0+1i) = (0+1i)^3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 0+1i > 0 \\ -0-1i > 0 \end{array} \quad \text{Sommo}$$

$$0 > 0$$

Similmente con l'altra disuguaglianza, dato che $0+1i < 0 \Rightarrow 0 < 0-(0+1i)$ cioè $0-1i > 0$

C2

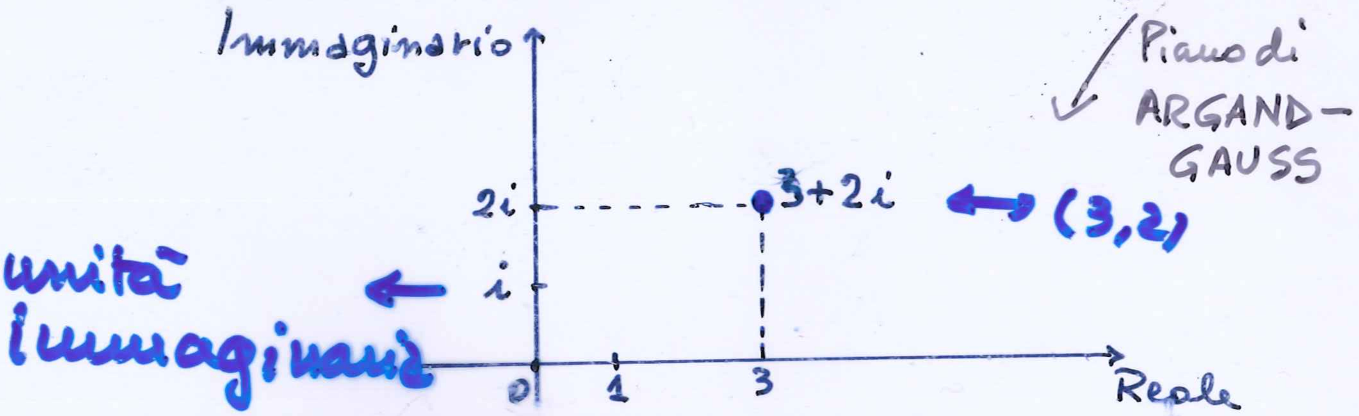
$\mathbb{C}$ è un campo che "contiene $\mathbb{R}$": $\{a + i0\}$.

Identifichiamo $\underline{a}$ con $\underline{a+i0}$ (le operazioni definite su $\mathbb{C}$ ristrette al s.i. dei complessi reali si comportano come quelle su $\mathbb{R}$) vedi pag C2.1

Questa è la FORMA ALGEBRICA dei numeri complessi.

Corrispondentemente: FORMA CARTESIANA

$$\mathbb{C} \ni a+ib \longleftrightarrow (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$



Somma ? vedi pag C2.2

Zero ?

Prodotto ??? $\longrightarrow$ serve passare a coordinate polari

Parte reale di $z = a+ib$: $\mathrm{Re}\, z = a$

Parte immaginaria di z : $\mathrm{Im}\, z = b$

vedi C2.1 fondo

Coniugato di z : $\bar{z} = a - ib = \mathrm{Re}\, z - i\, \mathrm{Im}\, z$

Modulo di z: è la dist. di z da $0 = 0+0i$ $\quad |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$$(a_1 + i0)(a_2 + i0) = a_1 a_2 - 0 + i(0) =$$
$$= a_1 a_2 + i0$$

C2.1

per la somma è anche più banale

$0 + 0i = 0$ numero complesso reale

$1 + 0i = 1$ " " "

Per i numeri con $\mathrm{Re}\, z = 0$ non vale la chiusura rispetto al prodotto:

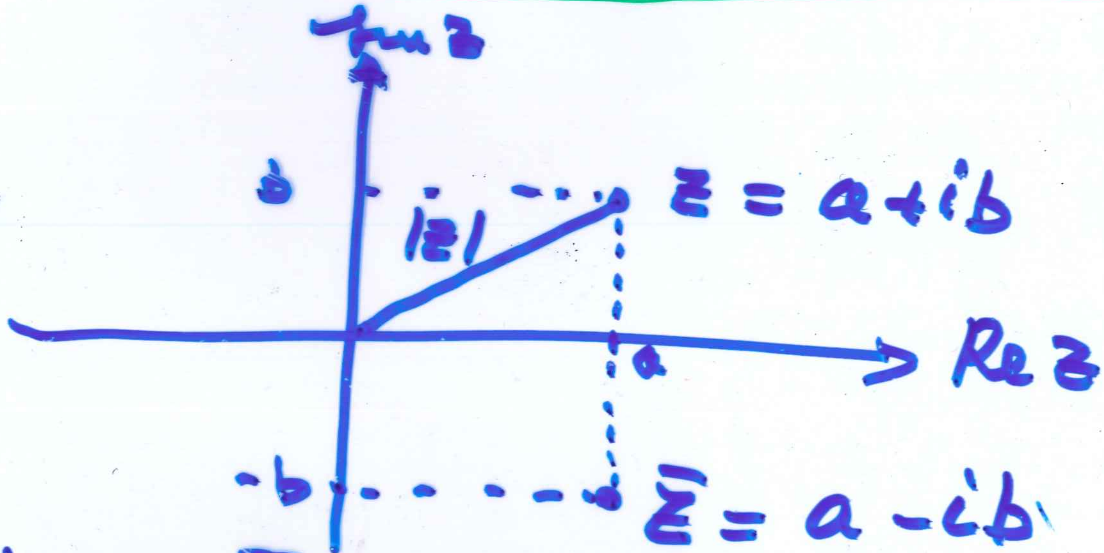
$$(0 + b_1 i)(0 + b_2 i) = 0 - b_1 b_2 + 0i$$

è REALE!

ciò nonostante diamo un nome ai numeri complessi della forma $0 + ib$:

IMMAGINARI PURI

e li scriviamo come
ib



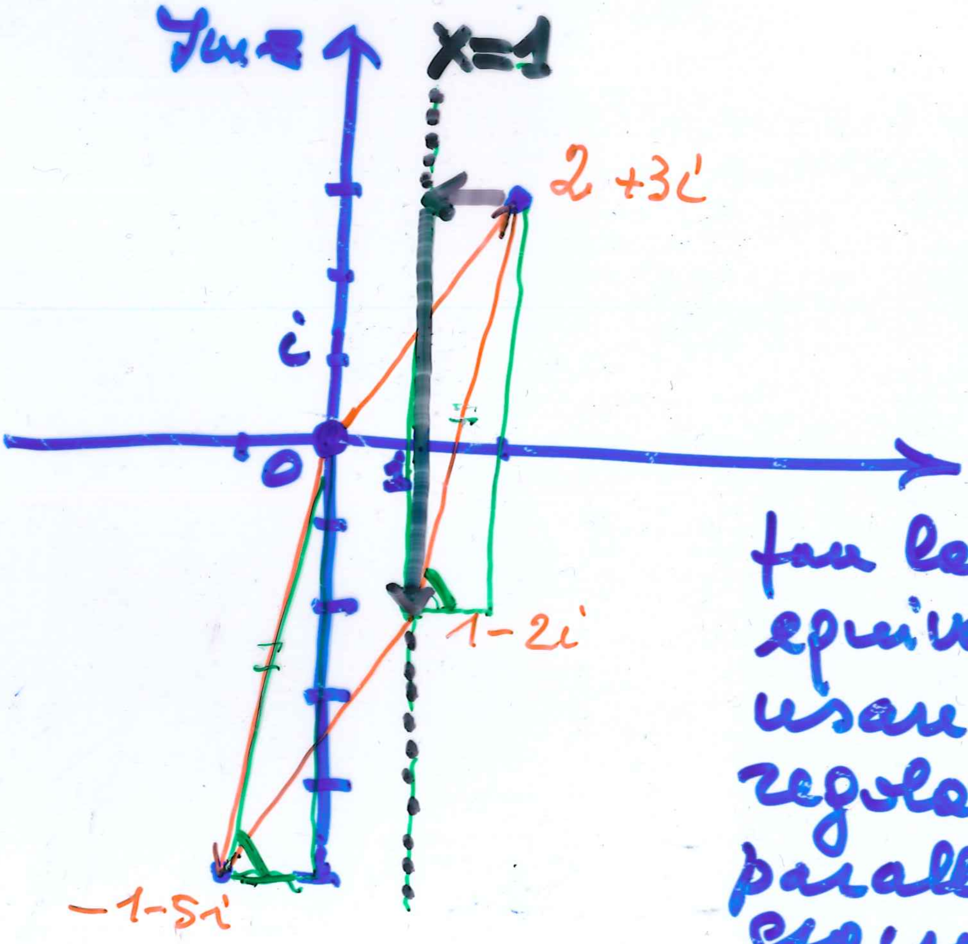
$$|z| = |\bar{z}|$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

C2.2

Visualizzazione della somma di 2 num. complessi (2+3i e -1-5i). In nero seguendo la costruzione suggerita dall'algebra (passi in direzione dell'asse x: -1 ; in direzione dell'asse y: -5). In rosso con considerazioni geometriche che portano alla costruz. di un parallelogramma.

$$(2+3i)+(-1-5i)=$$
$$=(2-1)+(3-5)i=$$
$$=1-2i$$



fare la somma equivale a usare la regola del parallelogramma

Proprietà: $z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$ $\qquad z-\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$

$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

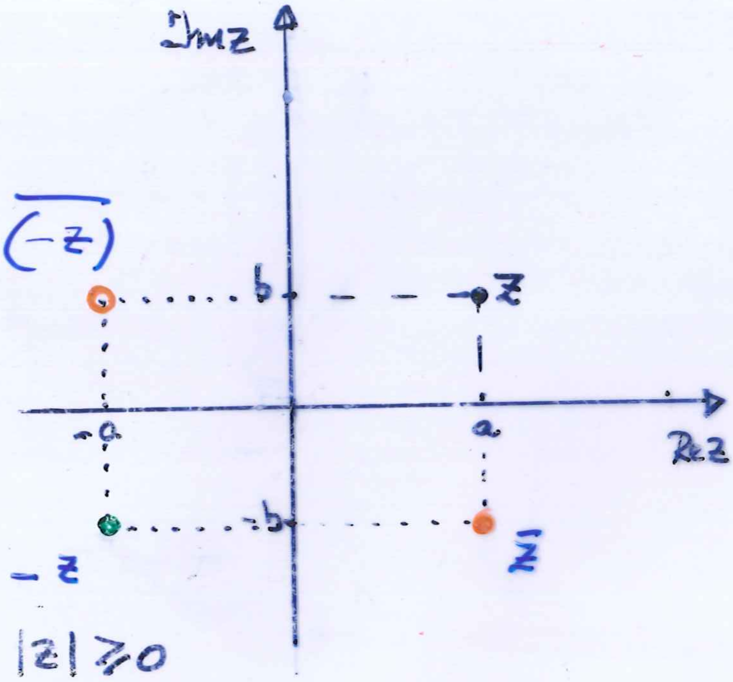
$\overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

$z\cdot\bar{z} = |z|^2$

$\overline{(\mathrm{Re}\,z)} = \mathrm{Re}\,z$

$\overline{i(\mathrm{Im}\,z)} = -(\mathrm{Im}\,z)i$



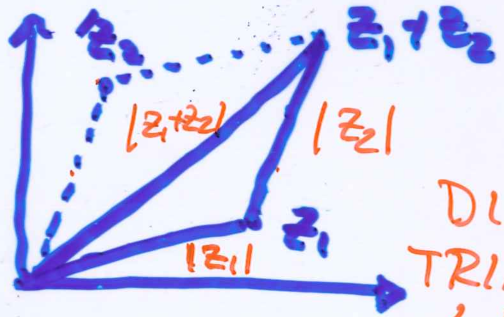
$|z| \geq 0$

$|\bar{z}| = |z|$

$|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

$\big||z_1|-|z_2|\big| \leq |z_1+z_2|$



DISUG. TRIANGOLARE

Trovare la forma algebrica di $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

Quindi $\mathrm{Re}\,z =$ $\qquad \mathrm{Im}\,z =$

$\bar{z} =$ $\qquad |z| =$

① Riferimento polare

O punto

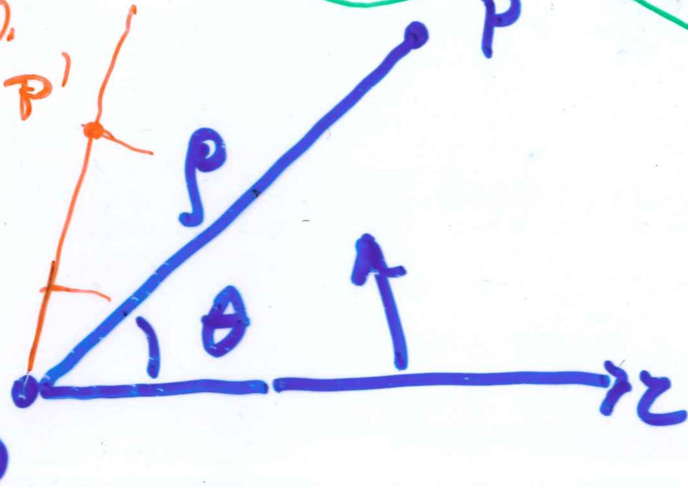
r semiretta di origine O

unità di misura u

e rappresento ogni P del piano $\neq O$ come una coppia (ρ,θ)

ove $\rho = \overline{PO}$ e $\theta = r\widehat{O}P$

$(\rho,\theta) \in (0,+\infty) \times (-\pi, \pi]$



② Fissato un riferimento polare, a ogni punto P del piano diverso da O è associata (vedi sotto) 1 e 1 sola coppia (ρ,θ).

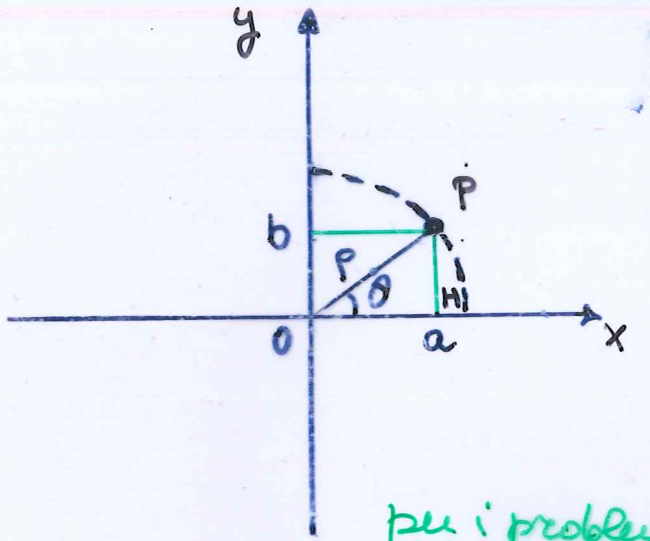
Viceversa, fissata una coppia (ρ',θ') (ad es. $\rho'=\frac{1}{2}\rho$, $\theta'=2\theta$), posso individuare univocamente il punto P' che ha quella dist. da O e tale che $r\widehat{O}P' = \theta'$.

③

$\rho=$cost. sono i punti della circonf. di centro O e raggio ρ

$\theta=$cost. sono i punti della semiretta che con r forma un angolo ampio θ

COORDINATE POLARI



$a = \rho \cos\theta$

$b = \rho \,\text{sen}\,\theta$

$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$

$\theta = ??$

individuato "modulo 2π"

per i problemi di calcolo vedi pag C4.1

Argomento di z

Argomento principale di z

$-\pi < \theta \leq \pi$

$z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$: FORMA TRIGONOMETRICA

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)\right)$ Vedi C4.3

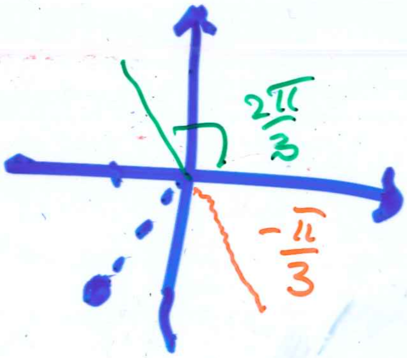
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}\left(\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)\right)$$

GRAFICAMENTE ?

Trovare argomento principale e modulo di :

10 , $3i$, $1+i$, $\sqrt{3}+i$, $1-\sqrt{3}i$

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (a, b)$$



$$-\frac{1}{2} = \sqrt{a^2+b^2}\cos\theta =$$

$$= \cos\theta$$

$$\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \operatorname{sen}\theta}$$

$$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} \overset{?}{=} \theta \text{ NO}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \overset{?}{=} \theta \text{ NO}$$

non è un metodo comodo

$$tg\,\theta = \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}}$$ no!

Posso aggiustare la cosa osservando che siamo nel 4° quadr $\Rightarrow$ prendo

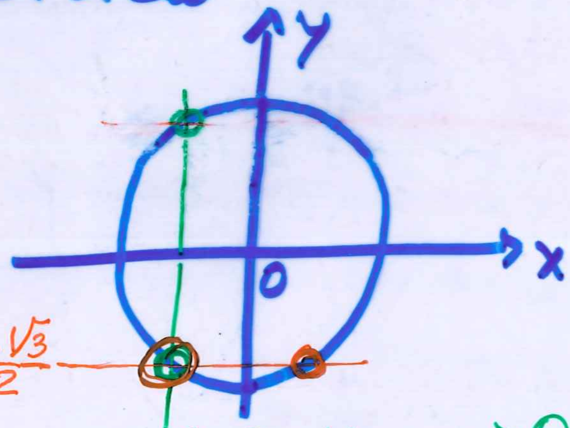
$$\arctan\sqrt{3} - \pi$$

(similmente, se fossi nel 2° quadrante prenderei $\arctan\frac{b}{a} + \pi$). Meglio:

Risolvo il sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = -\sqrt{3}/2 \\ \cos\theta = -1/2 \\ \theta \in (-\pi, \pi] \end{cases}$$

usando ad es. la circonferenza goniometrica



$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Downarrow$

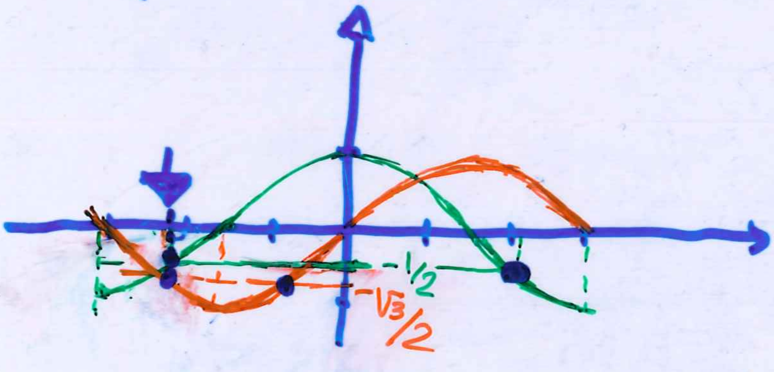
$\theta = -\pi/3$ o

$\theta = -\frac{2\pi}{3}$ (se $\theta \in (-\pi, \pi]$)

$\cos\theta = -1/2 \Rightarrow \theta = \pm \frac{2\pi}{3}$ se $\theta \in (-\pi, \pi]$

la soluz. comune è $\theta = \frac{-2\pi}{3}$

In alternativa si può tentare lo stesso gioco sul grafico, ma il tracciamento è più delicato



le intersezioni tra grafico di $\cos x$ e $y = -\frac{1}{2}$ hanno ascisse simmetriche risp. a $x=0$;

quelle tra il grafico di $\operatorname{sen} x$ e $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ hanno ascisse simmetriche rispetto a $x = -\frac{3\pi}{2}$.

Si cerca quali ascisse coincidono.

C4.3

$$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \,\mathrm{sen}\,\theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 [(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)]$$

$$= \rho_1\rho_2 [(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i(\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_1)]$$

$$= \rho_1\rho_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)]$$

il prod. di 2 num. complessi è un num. compl. che ha per modulo il prod. dei moduli e come argomento la somma degli argomenti

In part.

$$\rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\cdot(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) =$$

$$\rho(\cos(\theta+\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta+\theta_1))$$

dà la rotazione di θ_1.