Soluz. Esercizio sulle diseq. esponenziali
(a RICHIESTA degli studenti)

$$2^{x^2+3x} \cdot 5^{x^2+2x} > 4 \cdot 10^{4x}$$

$$2^{x^2+2x} \cdot 2^x \cdot 5^{x^2+2x} > 4 \cdot 10^{4x}$$

$$10^{x^2+2x} \cdot 2^x > 4 \cdot 10^{4x}$$

OPPURE
$(x^2+3x)\log_{10}2 +$
$+(x^2+2x)\log_{10}5 >$
$\boxed{\log_{10}4 + 4x}$
ecc.

$\downarrow \log_{10}$ $\boxed{10>1}$

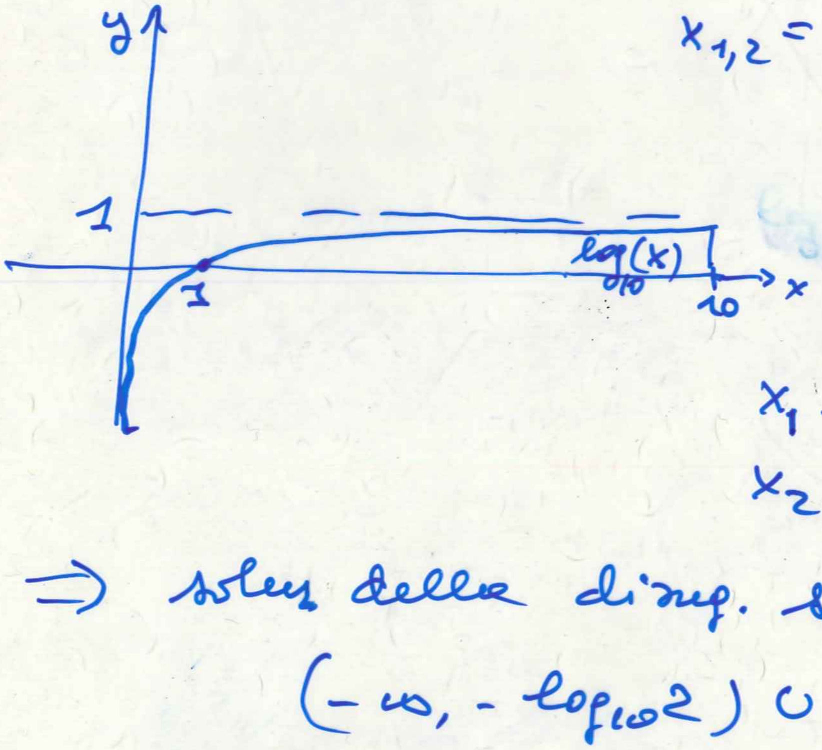
$$\log_{10}\left(10^{x^2+2x} \cdot 2^x\right) > \log_{10}\left(4 \cdot 10^{4x}\right)$$

$$\log_{10} 10^{x^2+2x} + \log_{10} 2^x > \log_{10} 4 + \log_{10} 10^{4x}$$

$$x^2+2x + x\log_{10}2 > 2\log_{10}2 + 4x$$

$$x^2 + x\left(-2+\log_{10}2\right) - 2\log_{10}2 > 0$$

Cerco le soluz. dell'equazione:



$$x_{1,2} = \frac{2-\log_{10}2 \pm \sqrt{4-4\log_{10}2+(\log_{10}2)^2+8\log_{10}2}}{2} =$$

$$= \frac{2-\log_{10}2 \pm (2+\log_{10}2)}{2}$$

$$x_1 = -\log_{10}2$$

$$x_2 = 2$$

$\Rightarrow$ soluz della diseq. sono i due intervalli
$$(-\infty, -\log_{10}2) \cup (2, +\infty).$$

1)

Esercizio sul lucido C3

$$z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$$ forma algebrica?

$\mathrm{Re}\, z$

$\mathrm{Im}\, z$

$\bar{z}$

$|z|$

z non è in forma algebrica poiché è scritto come prodotto di un numero complesso per il RECIPROCO di un altro: moltiplico num. e denom. per il coniugato del denominatore: $\bar{d} = \overline{1+i} = 1-i$

$$z = \frac{(1-i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1\cdot 1 - \sqrt{3}) + i(-1 - \sqrt{3})}{1+1} =$$

$$= \frac{(1-\sqrt{3})}{2} + i\,\frac{(-1-\sqrt{3})}{2}$$

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\bar{z} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{3}{4}} = \sqrt{2}$$

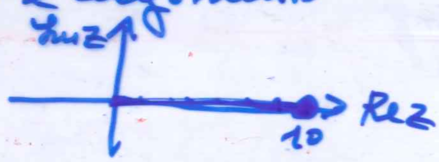
$\rightarrow$ lo potevo anche vedere come

$$\frac{|1-i\sqrt{3}|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

è più FACILE!

Es.1 PAG C41

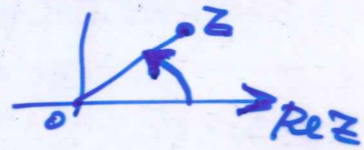
$z = 10$ trovare modulo e argomento



$|z| = 10$

$\arg z = 0$ argomento principale di z

Che cosa significa PRINCIPALE? →



$z = \rho\cos\theta + i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$

$= \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = a + ib$

$(*)\begin{cases} \rho\cos\theta = a \\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta = b \end{cases}$ non ha 1 sola soluz se penso $\theta \in \mathbb{R}$

se θ_0 è la soluz in $(-\pi, \pi]$, cioè l'argomento principale di z

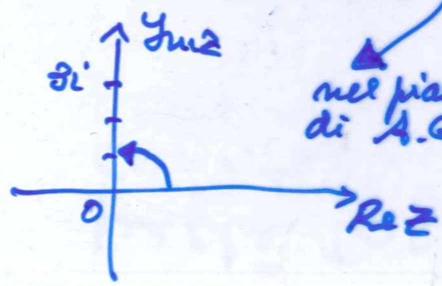
anche $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ è soluzione del sistema $(*)$

(per la periodicità di sen x e cos x)

Si dice che ogni $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ è un argomento di z e che il $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$ è l'argomento principale

Quindi i possibili argomenti di $z = 10$ sono $\theta = 0 + 2k\pi = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; $\theta_0 = 0$ è l'argomento principale

Es.2 $z = 3i$ → nel piano di A.G.



$|z| = 3$. Dal disegno vedo:

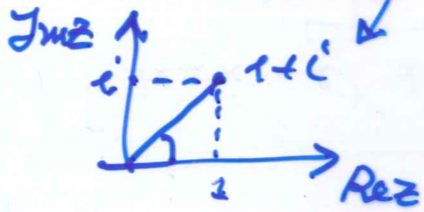
$\theta = \arg z = \frac{\pi}{2}$ (principale)

$\arg z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Oppure: $\cos\theta = \frac{0}{3}$, $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{3}{3} = 1$

Es. 3

$z = 1 + i$



dalla figura

$|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{\pi}{4}$ principale

$\arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

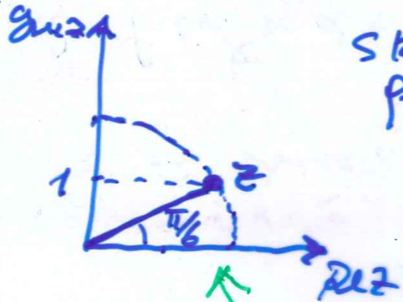
con le formule

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\quad \arg z = \theta$ con

$\begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\theta \\ 1 = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \cos\theta = \sqrt{2}/2 \\ \text{sen}\,\theta = \sqrt{2}/2 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \ldots$

Es. 4

$z = \sqrt{3} + i$



sta nel 1° quadrante, poiché

$\text{Re}\,z > 0$

$\text{Im}\,z > 0$

Faccio il disegno usando $|z| = 2$ e $\text{Im}\,z = 1$

$|z| = \sqrt{3+1} = 2$

con le formule:

$\begin{cases} \sqrt{3} = 2\cos\theta \\ 1 = 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \Longleftrightarrow$

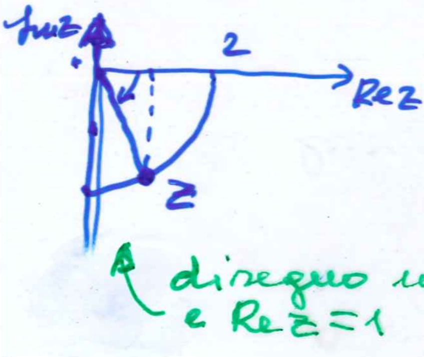
$\begin{cases} \cos\theta = \sqrt{3}/2 \\ \text{sen}\,\theta = 1/2 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\arg z = \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

arg principale $= \frac{\pi}{6}$

Es. 5

$z = 1 - \sqrt{3}\, i$



$\text{Re}\,z = 1 > 0$

$\text{Im}\,z = -\sqrt{3} < 0$

Sono nel 4° quadrante e faccio il disegno usando $|z| = 2$ e $\text{Re}\,z = 1$

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$

$\arg z = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

(dal disegno)

o con le formule:

$\begin{cases} 1 = 2\cos\theta \\ -\sqrt{3} = 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = 1/2 \\ \text{sen}\,\theta = -\sqrt{3}/2 \end{cases}$

posso (se voglio) usare arcsen y per ricavare θ poiché sono nel 4° quadrante cioè $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Torniamo alla teoria. Ho visto ieri che:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i \,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\right),$$

se $\quad z_h = \rho_h \left(\cos\theta_h + i \,\mathrm{sen}\,\theta_h\right) \quad h=1,2$

Inoltre

$$1 = 1\left(\cos 0 + i \,\mathrm{sen}\, 0\right)$$

Allora come scrivo

$\frac{1}{z_1} \; ? = z_2 \quad$ t.c. $\; z_1 \cdot z_2 = 1 \;$ cioè

$$\rho_1 \rho_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i \,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\right) =$$
$$= 1\left(\cos 0 + i \,\mathrm{sen}\, 0\right)$$

$$\Rightarrow \quad \rho_1 \rho_2 = 1 \qquad \Rightarrow \rho_2 = \frac{1}{\rho_1}$$

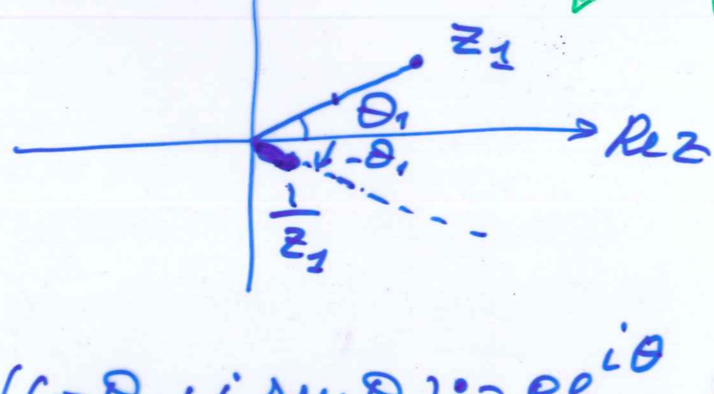
una soluz. possibile per l'argomento è

$$\theta_2 = -\theta_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1}\left(\cos(-\theta_1) + i \,\mathrm{sen}(-\theta_1)\right)}$$

Graficamente

$$\Rightarrow \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \theta_1 - \theta_2$$



$\rho(\cos\theta + i \,\mathrm{sen}\,\theta) := \rho e^{i\theta}$ def. coerente con il prodotto di 2 num. complessi e le leggi sull'esponenziazione

Noi non useremo quasi mai la notazione esponenziale!

$$z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

se voglio modulo e argomento posso lavorare su num. e denom. seguendo le regole precedenti

$$|z| = \frac{|1-i\sqrt{3}|}{|1+i|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$ (vedi pag 1)

$$\arg z = \arg(1-i\sqrt{3}) - \arg(1+i) =$$
$$= -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{12}$$ principale

$$\arg z = \frac{-7\pi}{12} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

---

se $z_k = \rho_k (\cos\theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k)$

$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2))$

DATO. Dunque,

se $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, allora

$$z^2 = \rho^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$
$$z^3 = \rho \cdot \rho^2 (\cos(\theta+2\theta) + i \operatorname{sen}(\theta+2\theta)) =$$
$$= \rho^3 (\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$$

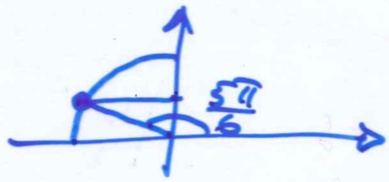
in generale:

$$\boxed{z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

$Z = (-\sqrt{3} + i) \Rightarrow Z^{10}$? Per non usare lo sviluppo del binomio posso procedere così:

$|z| = \sqrt{3+1} = 2$

$\theta = \arg z = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$



$$Z^{10} = |z|^{10} (\cos 10\theta + i \,\text{sen}\, 10\theta)$$

Vedo che $10\theta = \frac{50}{6}\pi = 8\pi + \frac{2}{6}\pi$

è un angolo CONGRUO mod 2π a $\frac{\pi}{3}$

cioè esiste un multiplo di 2π tale che $\frac{50}{6}\pi - \frac{\pi}{3}$ sia uguale a tale numero (nel caso concreto $4 \cdot 2\pi$); quindi

$$\cos \frac{50}{6}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 8\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\, \frac{50}{6}\pi = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 8\pi\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$

$$Z^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{9}(1 + i\sqrt{3}) =$$

$$= 512 + i\, 512\sqrt{3}$$

$$z^2 = \rho^2 (\cos 2\theta + i \,\mathrm{sen}\, 2\theta)$$

$\vdots$

$$z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \,\mathrm{sen}\, n\theta)$$

Es. $(\sqrt{3}+i)^3 = 2^3 \left(\cos 3 \cdot \frac{\pi}{6} + i \,\mathrm{sen}\, 3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 8i$

VERO?

$=$

Viceversa.

se $w \in \mathbb{C}$ è un numero complesso fissato cioè $\forall$ l'equazione $z^n = w$ ha n soluz.

Sia $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Esistono <u>esattamente</u> <u>n radici n-esime</u> complesse: $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ di w.

Se $w = r(\cos\varphi + i \,\mathrm{sen}\, \varphi)$

e $z_k = \rho_k (\cos\theta_k + i \,\mathrm{sen}\, \theta_k)$

ρ_k, θ_k incognite.

Se $z_k^n = w$ allora

si ha: $\rho_k = r^{1/n}$ $\quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$

$\theta_k = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$ $\quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$

Sono tutte distinte

NON ce ne sono altre.

Vedi dim. a pag C5.1,2

Esempi:

radice cubica di 1: vedi C5.3

rappresentazione grafica:

Dim. del teorema di esistenza di n radici n-esime complesse

$w = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ fissato $\neq 0$

Sia $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k)$ una radice n-esima di w. Allora

$$z_k^{\,n} = w$$

cioè

$$\rho_k^n(\cos n\theta_k + i \operatorname{sen} n\theta_k) = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi).$$

Ora due num. complessi in forma trigonom. sono uguali devono avere

- ugual modulo: $\rho_k^n = r$
- argomenti congruenti tra loro mod. 2π:
$$n\theta_k = \varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

- $\rho_k^n = r$ ha 1 e 1 sola soluz. ($\rho \in (0, +\infty)$!)
$$\rho_k = \sqrt[n]{r}$$

- $$\underbrace{\theta_k = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}}$$

quanti numeri complessi distinti rappresentano?

Ad es. se $n = 3$

$$\theta_0 = \frac{\varphi}{3} + 0 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\varphi}{3} \quad k=0$$

$$\theta_1 = \frac{\varphi}{3} + 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3} \quad k=1$$

$$\theta_2 = \varphi/3 + 2 \cdot 2\pi/3 = \frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3} \quad k=2$$

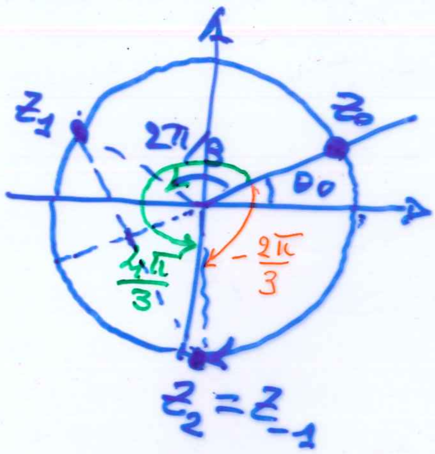
→ prendo $k=3$

$\theta_3 = \theta_0 + 2\pi$

$\Rightarrow$

$\operatorname{sen}\theta_3 = \operatorname{sen}\theta_0$

$\cos\theta_3 = \cos\theta_0$



$k = -1$

$$\theta_{-1} = \frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3}$$

$k = -2$

$$\theta_{-2} = \frac{\varphi}{3} - \frac{4\pi}{3}$$

Se parto da $k = -1$ devo poi considerare
$k = 0$
$k = 1$

cioè, in generale, devo considerare n valori (distinti) di k in sequenza

$\Rightarrow$ ci sono al più n radici n-esime della forma:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\right)$$

al variare di k in (ad es.) $0, 1, \dots, n-1$

e sono esattamente n perché

seno e coseno hanno periodo π e quindi si aggiunge esattamente 2π solo quando si sono passati n valori distinti in sequenza di k

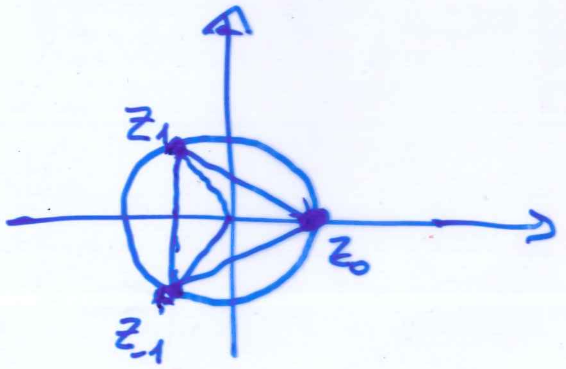
C5.3

Radice cubica di 1

$w = 1 + 0i$

$|w| = 1$

$(\arg w) = 0 + 2k\pi$



$z_{-1} = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

$z_0 = 1$

$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z^3 = 1$

$|z_k| = \sqrt[3]{1} = 1$

$\arg z_k = \frac{0}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot k$

ove $k \in \{-1, 0, 1\}$
in modo che gli arg. siano principali

Tutte le radici stanno su una circonf. di raggio 1 ai vertici di un triangolo equilatero (aggiungo sempre angoli uguali, frazioni di 2π)

$\Rightarrow$ poligono regolare di 3 lati $\Rightarrow$ triang. equilatero