TEOREMA DI ESISTENZA DI n-radici n-esime complesse

Hp: $w = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ è un $\mathbb{C}$ numero complesso $\neq 0$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Ts: esistono n num. complessi

$$z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k)$$

tali che $z_k^n = w$

e per la precisione

$$\rho_k = r^{1/n} = \sqrt[n]{r}$$

$$\theta_k = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

o altri n interi IN SEQUENZA

Dim. $z_k^n = w \iff$

$$\rho_k^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \rho_k^n = r \in (0, +\infty) \\ n\theta_k = \varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \rho_k = \sqrt[n]{r} \\ \theta_k = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

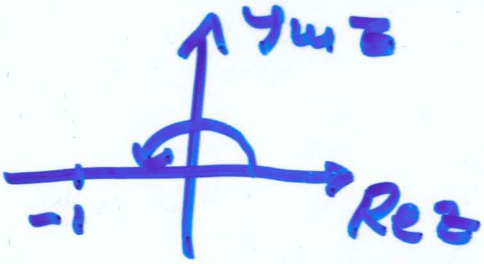
$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta_l \neq \operatorname{sen}\theta_h \\ \cos\theta_l \neq \cos\theta_h \end{array}\right| \Rightarrow \theta_l - \theta_h \neq 2k\pi$$

$\Rightarrow$ solo n numeri diversi in sequenza.

CVD.

C6. Esercizio 1

$w = -1$ trovare le radici quarte.



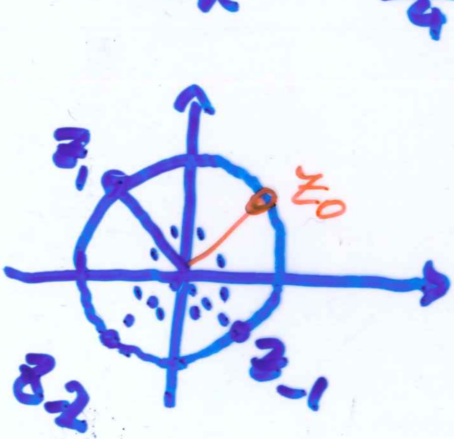
$|w| = 1$

$\arg w = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$$z_k = \rho_k (\cos\theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k)$$

$$\rho_k = \sqrt[4]{1} = 1$$

$$\theta_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{con } k = -2, -1, 0, 1$$

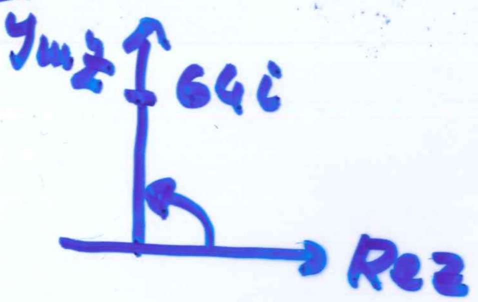


Se voglio l'arg. princ.

$$z_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = -z_{-2}$$

$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = -z_{-1}$. Le radici sono i vertici di un quadrato.

2] Radici seste di $w = 64i$



$$|w| = 64$$

$$\arg w = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z_k^6 = w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z_k| = \sqrt[6]{64} = 2$$

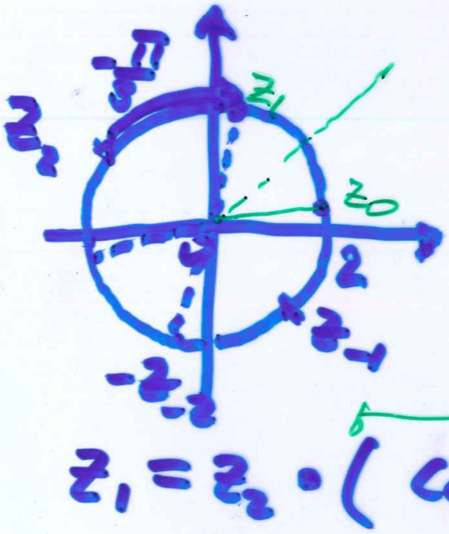
$$\theta_k = \arg z_k = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

6 valori consec.

$$\theta_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}\ ; \quad \theta_2 = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$



Tutte le 6 radici sono vertici di un esagono regolare inscritto nella circonf. di raggio 2 e centro O

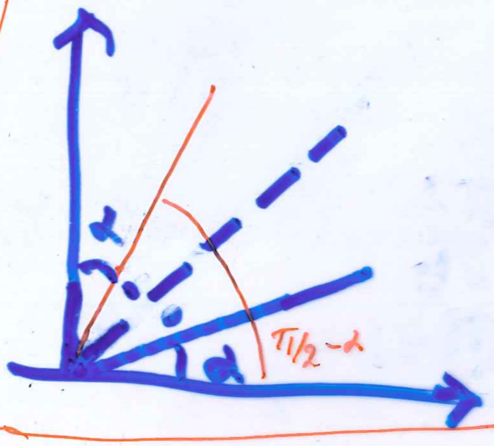
$$z_1 = z_2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

rappresenta la rotaz. di $-\frac{\pi}{3}$ intorno a O

$$= (-\sqrt{2} + i\sqrt{2})\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

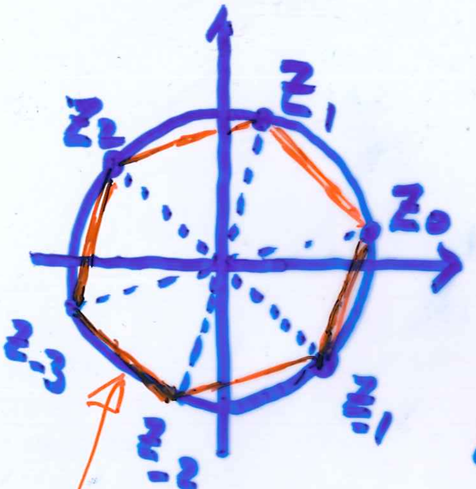
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Dato che z_0 è simmetrico di z_1 rispetto alla bisettrice del 1° quadr.



$$\alpha = \pi/12 \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{5\pi}{12}$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



esagono regolare (nelle intenzioni)

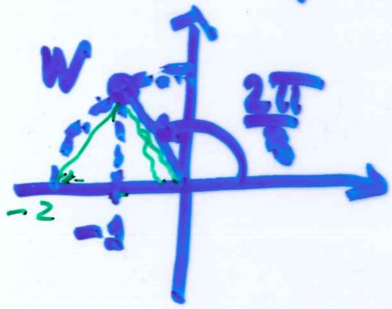
Le altre radici sono opposte di quelle già calcolate

$$z_{-1} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z_{-3} = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

Radici quarte di $w = \sqrt{3}\,i - 1$

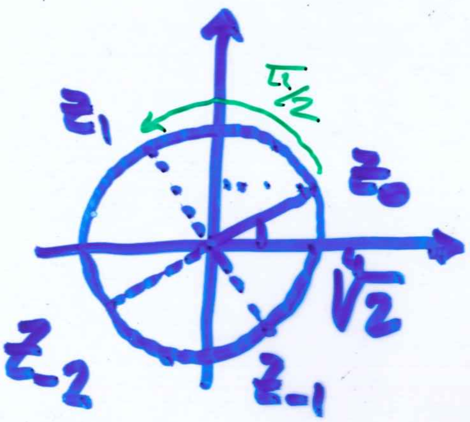


$$|w| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\arg w = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z_k^4 = w \ : \quad |z_k| = \sqrt[4]{2}$$

$$\arg z_k = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad k = -2, -1, 0, 1$$



$k=0$ $$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{18}}{2} + i\,\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$$

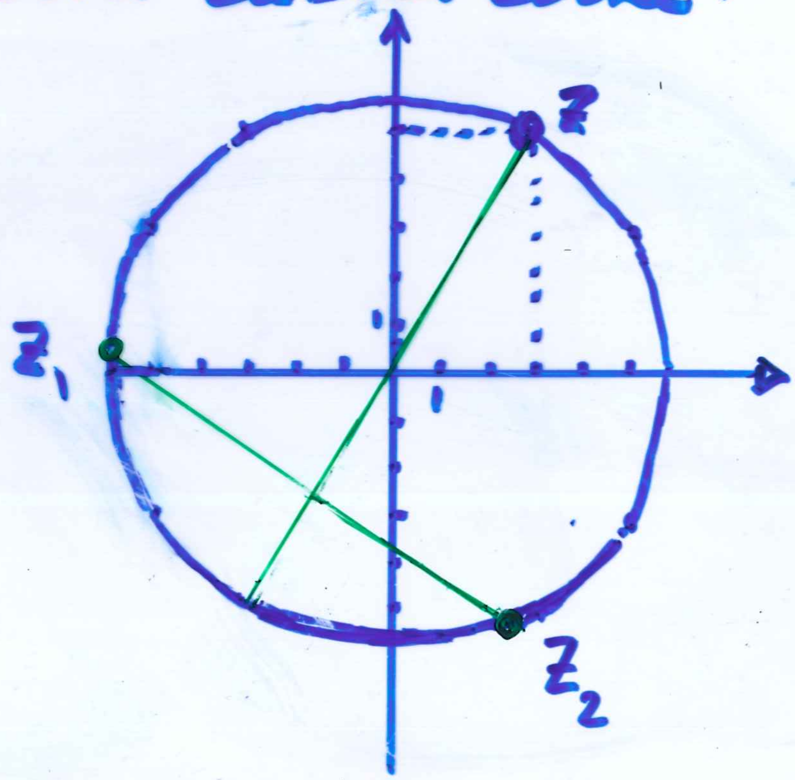
Rotaz. di $\frac{\pi}{2}$: $v = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = i$

$$z_1 = z_0 \cdot i = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + \frac{\sqrt[4]{18}}{2}\,i$$

$$z_{-1} = -z_1 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} - \frac{\sqrt[4]{18}}{2}\,i$$

$$z_{-2} = -z_0 = -\frac{\sqrt[4]{18}}{2} - i\,\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$$

Sia $z = 3 + 5i$ una radice terza di w. Calcolare le altre radici terze.



Basta fare una rotaz. di $\frac{2\pi}{3}$ e una di $-\frac{2\pi}{3}$

$$v = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_0 = z = 3 + 5i$$

$$z_1 = z_0 \cdot v = (3+5i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2 = (3+5i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} + i\left(\underbrace{-\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}}_{}\right)$$

>0

Determinare l'argomento principale di $z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Svolgimento

$|z_2| = |z_0| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{5\sqrt{3}-3}{2\sqrt{34}} > 0 \\ \operatorname{sen}\theta = -\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{34}} < 0 \end{cases}$$

sono nel 4° quadrante $\Rightarrow$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Dunque

posso usare arcsen $\dfrac{-(5+3\sqrt{3})}{2\sqrt{34}}$ per trovare θ

Oppure usare $\arctan\left(-\dfrac{5+3\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-3}\right)$, visto che queste funzioni danno l'inversa (risp. di sen e cos) in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Alternativamente cerco $\arg z_0 = \arctan\frac{5}{3}$ e sottraggo $\frac{2\pi}{3}$.

Cos'è una rotazione di $\frac{2\pi}{n}$?

$\cos\frac{2\pi}{n} + i \,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{n}$ è una radice n-esima di 1

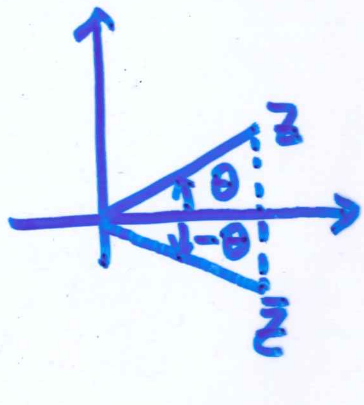
Quindi

Ogni radice n-esima di un numero w può essere ottenuta moltiplicando una particolare radice n-esima z di w per tutte le radici n-esime di 1 (diverse da 1, che restituisce z).

Una nota utile per lo svolgimento di alcuni esercizi:

Se $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))$



C6

radice quarta di $-i$:

rappresentazione grafica:

radice sesta di $64i$

rappresentazione grafica:

radice quarta di $\sqrt{3}i - 1$

rappresentazione grafica:

Teorema fondamentale dell'algebra: ogni equazione polinomiale di grado n a coefficienti complessi ammette esattamente n radici complesse.

Cosa si deduce dal teor fond. dell'algebra?

Considero un polinomio a coeff. reali:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 1 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ $P(x)$ ha n radici complesse.

Sia α una di queste radici, cioè:

$$P(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \alpha^n = 0.$$

Poiché $\bar{a}_i = a_i$ (essendo i coefficienti reali)

$$\bar{0} = \overline{P(\alpha)} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{\alpha} + \dots + \bar{a}_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \bar{\alpha}^n =$$

$$= a_0 + a_1 \bar{\alpha} + \dots + a_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \bar{\alpha}^n = P(\bar{\alpha})$$

cioè anche $\bar{\alpha}$ è una radice del polinomio $P(x)$ il quale ha quindi:

$2h$ radici complesse coniugate ($h \geq 0$)

$n-2h$ radici reali.

- Se n è pari può essere $2h = n$ (non esistere radici reali)
- Se n è dispari $n - 2h \geq 1$ $\Rightarrow$ esiste un numero dispari di radici reali

Ricordo che vale

Teor. di Ruffini: sia $P(x)$ un pol. a coeff. reali, sia α un numero reale.

$$P(x) = (x-\alpha)\,Q(x) + r$$

ove $r \in \mathbb{R}$. Si vede che

$$P(\alpha) = 0 + r$$

$\Rightarrow$ Se so che α è una radice di $P(x)$ – cioè $P(\alpha)=0$ – allora

$$P(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$$

Se ho n radici complesse

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n$$

potrò scrivere

$$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

event. coeff. direttore di $P(x)$

con radici che se non sono reali sono a 2 a 2 coniugate.

Vediamo su due esempi che cosa succede

$$(x-\alpha_1)(x-\overline{\alpha}_1) = P(x)$$

Se α_1 è complesso non reale

$$P(x) = x^2 - (\alpha_1+\overline{\alpha}_1)x + \alpha_1\overline{\alpha}_1 =$$
$$= x^2 - 2(\mathrm{Re}\,\alpha_1)x + |\alpha_1|^2$$

Polinomio di 2° grado con $\Delta < 0$ poiché $|\alpha_1|^2 = (\mathrm{Re}\,\alpha_1)^2 + (\mathrm{Im}\,\alpha_1)^2$ e $(\mathrm{Im}\,\alpha_1)^2 \neq 0$

Se $P(x)$ ha grado 3 ha almeno 1 rad. reale

$$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\overline{\alpha}_1)(x-\alpha_2)$$
$$= (x^2 - 2\mathrm{Re}\,\alpha_1\, x + |\alpha_1|^2)(x-\alpha_2)$$

e quindi (o si scrive come prodotto di 3 binomi reali o) è prodotto di un binomio reale di gr. 1 e di un polin. di 2° gr. con $\Delta<0$

In generale se il grado n di $P(x)$ è

- pari, $P(x)$ si può scrivere come il prod. di un numero pari di binomi reali di 1° grado (event.: 0) e di polinomi di 2° grado con $\Delta<0$
- dispari, $P(x)$ si può scrivere come prodotto di un numero dispari (almeno 1!) di binomi reali di 1° grado e di polinomi di 2° gr. con $\Delta<0$.

Risolvere le seguenti equazioni:

$$iz^3 = \bar{z}$$

$$4|z| = z^3 \qquad\qquad |z| = -iz^3$$

$|z^3| = -4z$ dire a priori quante soluzioni sono complesse NON reali

$$(z-i)^4 = 1+\sqrt{3}\,i$$

- Supponiamo che una radice 4ª di w sia $2-3i$. Determinare le altre radici quarte

- Supponiamo che una radice 3ª di w sia $12-5i$. Determinare le altre radici terze

- $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ è una radice nona di se stesso?

- Trovare modulo e argomento principale di $z=(1+i)^5$. Rappresentare poi nel piano di A.G. tutte le radici quinte di z

- Trovare le radici terze di $\dfrac{i\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{5+3i}$