VETTORI

grandezze individuate da : MODULO (o norma) : reale ≥ 0
DIREZIONE
VERSO.

Rappresentazione: FRECCE USCENTE DA UN PUNTO FISSATO DELLO SPAZIO : O

.... Traslazione $\underline{v}$ da O ad A
o equivalentemente da P a Q $\quad \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}$
o ......

identificazione di vettori EQUIPOLLENTI

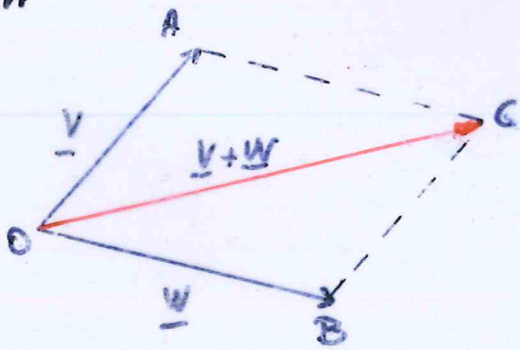
$|\underline{v}|$

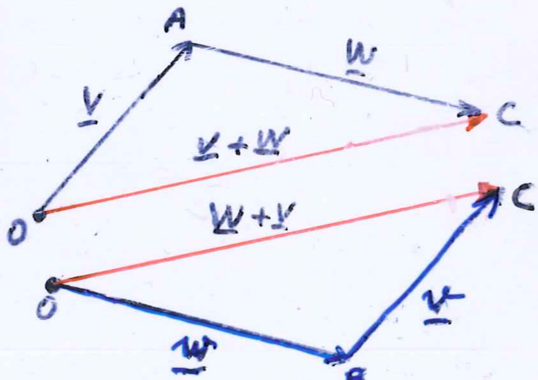
se $|\underline{v}| = 0$ dico che $\underline{v}$ è il vettore nullo $\quad \underline{0}$

OPERAZIONI

SOMMA

$\underline{v}+\underline{w}$

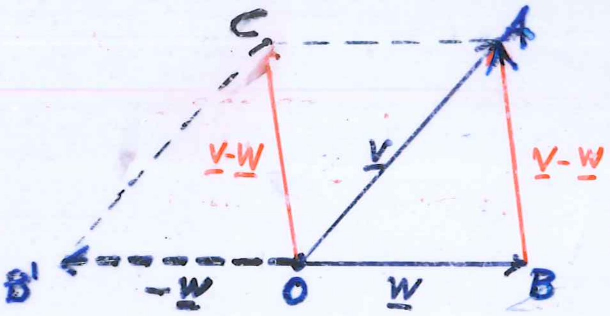




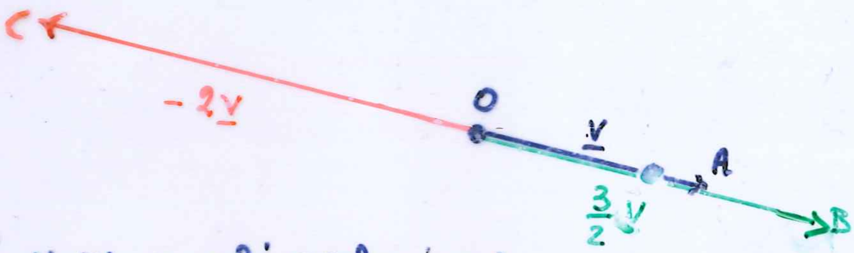
- commutativa
- associativa
- neutro : vettore nullo : $\underline{0}$
- opposto

DIFFERENZA : $\underline{v} - \underline{w}$

$\vec{OC} = \cancel{\vec{AB}}$ NO $\vec{BA}$



PRODOTTO $\boxed{\text{PER}}$ SCALARE $t \in \mathbb{R}$



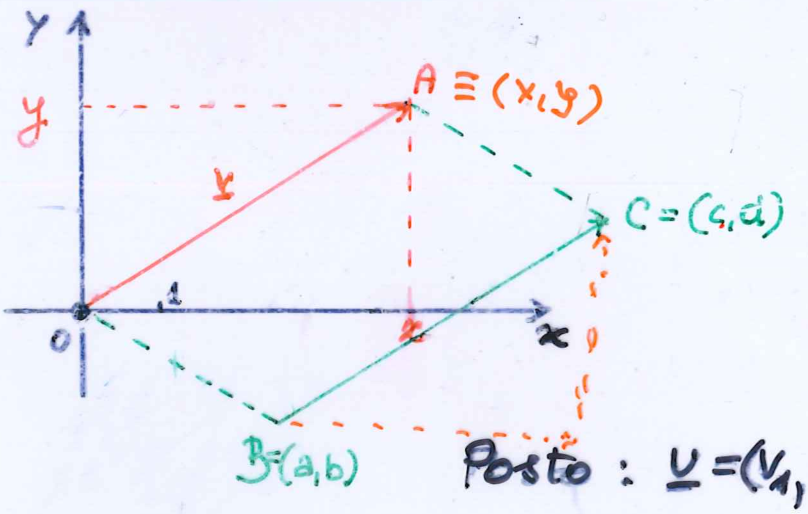
Per tutti i $\underline{v}, \underline{w}$ e gli scalari s, t:

- $(s+t)\,\underline{v} = s\underline{v} + t\underline{v}$
- $s(\underline{v} + \underline{w}) = s\underline{v} + s\underline{w}$
- $s(t\underline{v}) = (st)\,\underline{v}$
- $1(\underline{v}) = \underline{v}$

Dirò che i vettori con "SOMMA" e "PRODOTTO PER SCALARE" formano spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

VETTORI COME "n-uple" ORDINATE

Sist. di riferimento nel piano



$\underline{v} = \vec{OA} = (x, y)$

x, y componenti (scalari) di $\underline{v}$

$\vec{OA} = \vec{BC} = (c-a, d-b)$

equazioni param. della retta

Posto : $\underline{v} = (v_1, v_2)$, $\underline{w} = (w_1, w_2)$

$$\Rightarrow \quad \underline{v} + \underline{w} = (v_1 + w_1,\; v_2 + w_2)$$
$$t\,\underline{v} = (t v_1,\; t v_2)$$

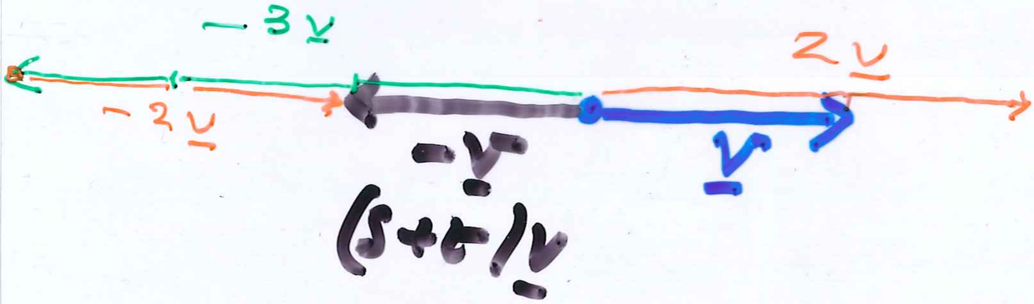
vedi pag V2.2

$$(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w} = \underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$$

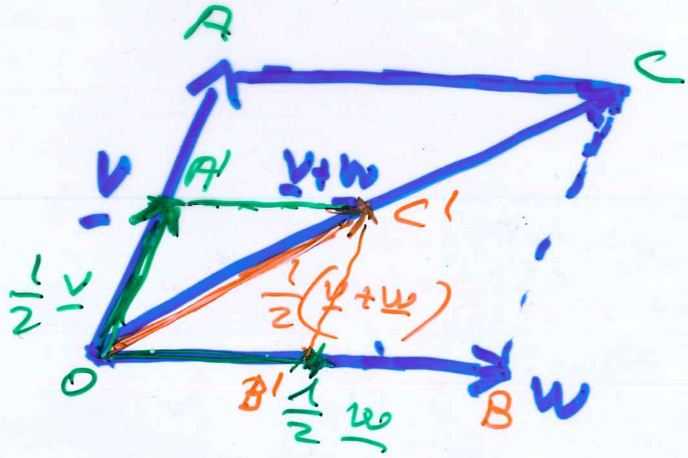
propr. ass. della + di vettori

$$(s+t)\,\underline{v} = s\,\underline{v}+t\,\underline{v}$$

$s=-3 \quad t=2 \qquad s+t=-1$



$$s(\underline{v}+\underline{w}) = s\underline{v}+s\underline{w}$$



$s=\frac{1}{2}$

per l'inverso di Talete $A'C' \parallel AC$

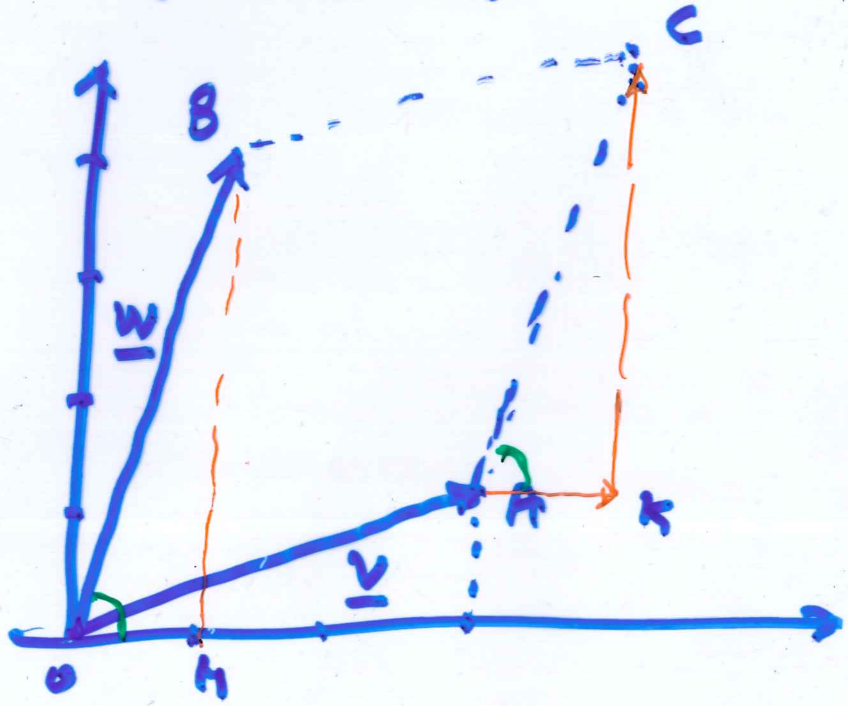
$B'C' \parallel BC$

C' è il 4° vertice del parallelogr. di vertici A'OB' $\Rightarrow \overline{OC'} = \overline{OA'}+\overline{OB'}$

V2.2

$\underline{v} = (v_1, v_2)$

$\underline{w} = (w_1, w_2)$



l'angolo $B\hat{O}H$ è congruente all'angolo $C\hat{A}K$ (stessa a[illegible])

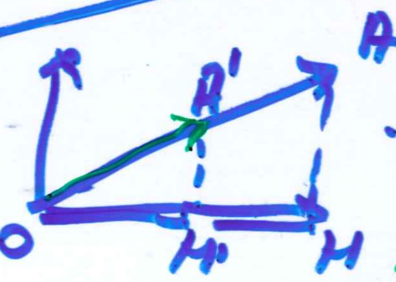
per ottenere le coord. di C ho sommato alle coord di A quelle di B

$\Rightarrow$ la traduzione della somma per componenti:

$\underline{v} + \underline{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$

è sensata

idem per il prodotto



$AH \parallel A'H'$ proporzioni conservate

Modulo di $\underline{v} = (x,y)$: $\sqrt{x^2+y^2}$ $\Rightarrow$

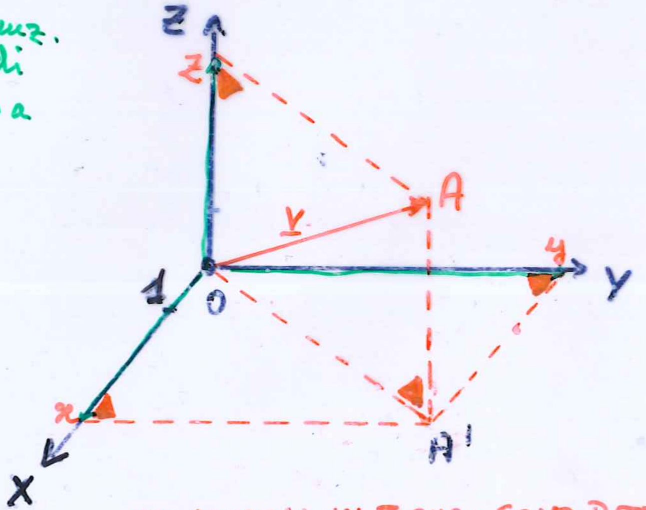
Distanza di B da C : $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$ → Vedi es. pag. V3.1 A

Versori della base canonica: $\underline{i} = (1,0)$ $\underline{j} = (0,1)$ Vedi pag. V3.1 B

↳ **hanno modulo 1**

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nello spazio con orientazione DESTRORSA

vedi costruz. del sist. di rif. in 3D a pag. V3.2



GLI ANGOLI IN FIGURA SONO RETTI

$\underline{v} = \overrightarrow{OA} = (x,y,z)$

... componenti di $\underline{v}$

$|\underline{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow$ distanza tra 2 punti $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $C = (c_1, c_2, c_3)$

$|\overrightarrow{BC}| = |(c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3)|$

$= \sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2+(c_3-b_3)^2}$

Se $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$\underline{v} + \underline{w} = (v_1+w_1, \ v_2+w_2, \ v_3+w_3)$

$t\underline{v} = (tv_1, tv_2, tv_3)$

Versori della base canonica $\underline{i} = (1,0,0)$, $\underline{j} = (0,1,0)$, $\underline{k} = (0,0,1)$

$(x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

cioè è la comb. lin. tramite x, y, z (ordinatam.) di $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$

Combinazione lineare → **significa**

Indipendenza lineare

v, w dipendenti

$\underline{u} = a\underline{v} + b\underline{w}$

V3.1

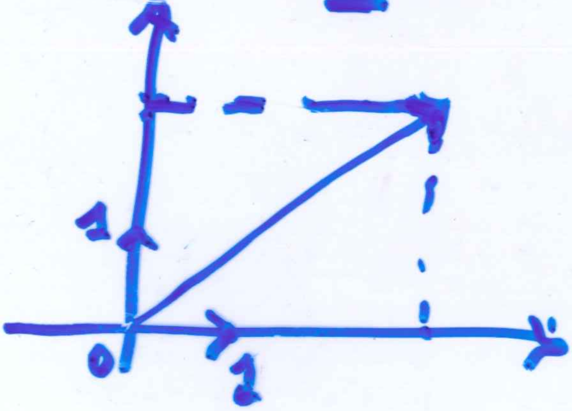
(A) il vettore $\overrightarrow{BC}$ con $B=(-3,5)$ e $C=(2,-7)$ che modulo ha? Che componenti ha?

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2-(-3))^2+(-7-5)^2} =$$
$$= \sqrt{25+144} = 13$$

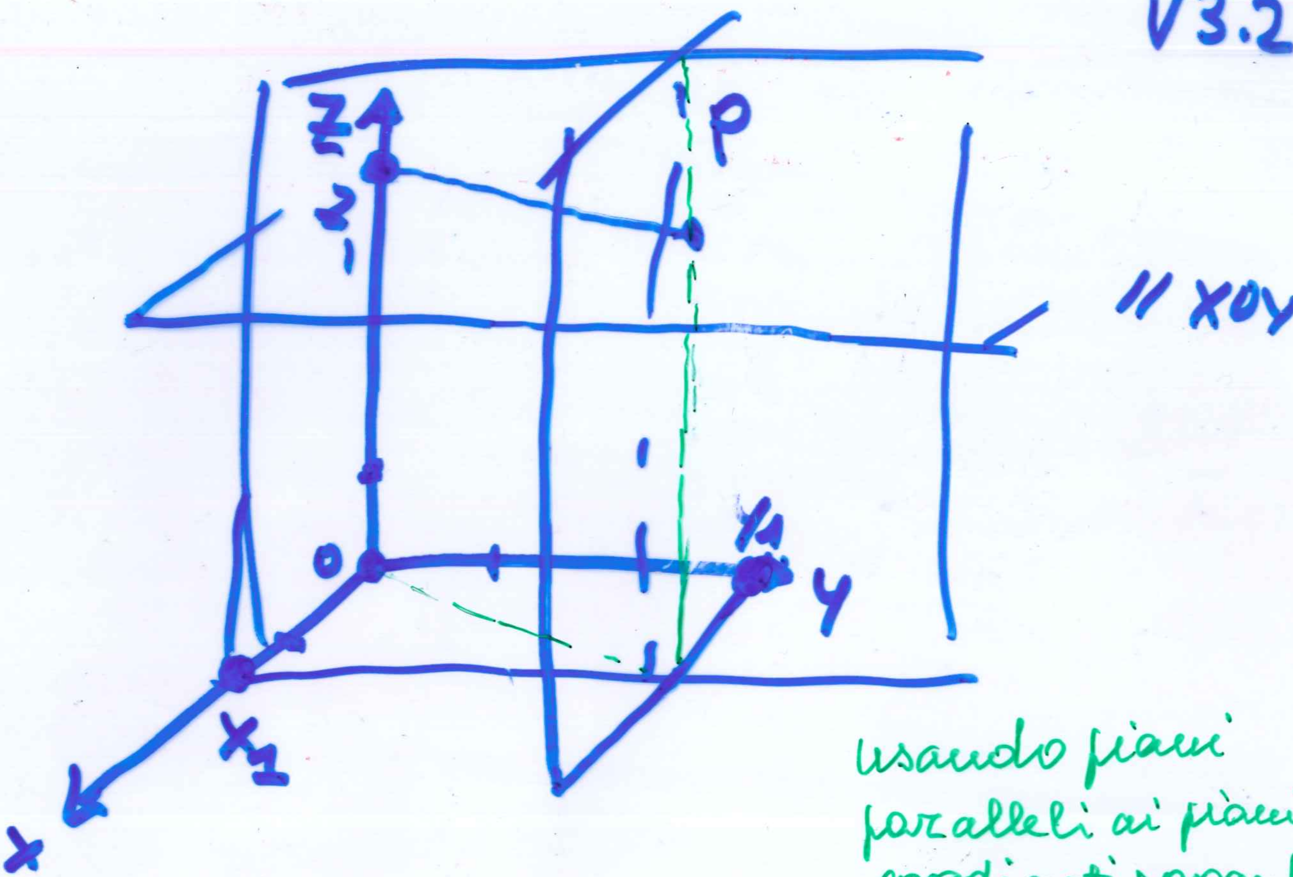
$$\overrightarrow{BC} = (2-(-3), -7-5) = (5,-12)$$

(B)

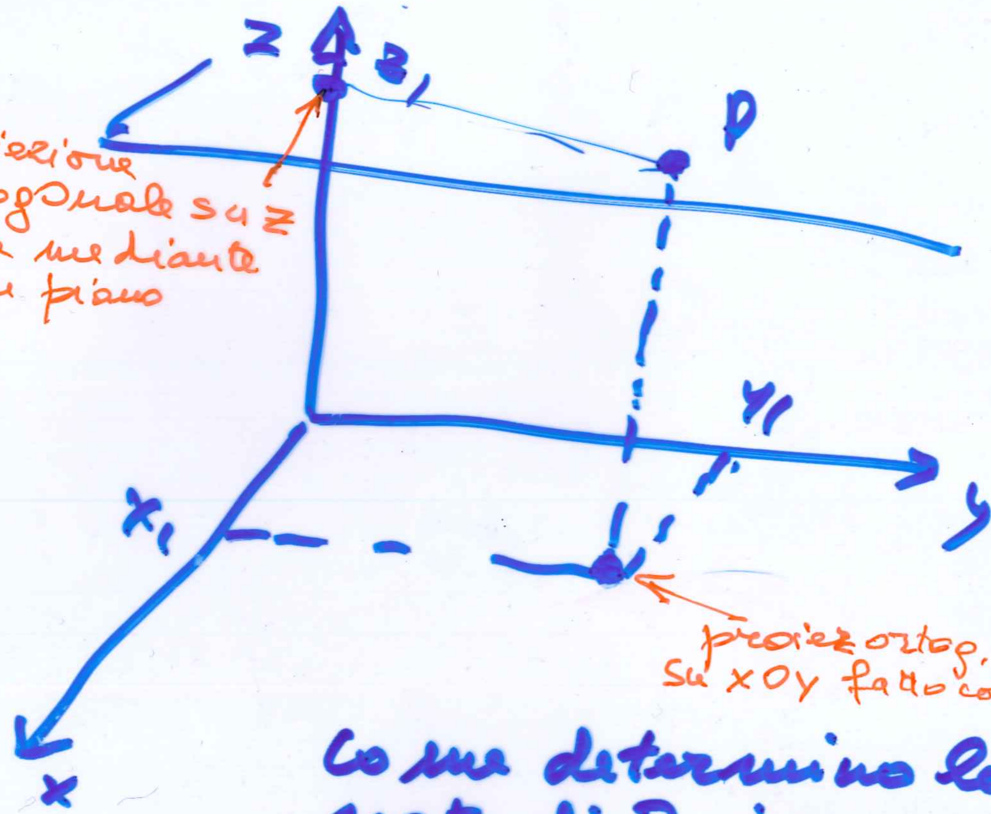
$$\underline{v} = (v_1, v_2) = (v_1, 0) + (0, v_2) =$$
$$= v_1 \underbrace{(1,0)}_{\underline{i}} + v_2 \underbrace{(0,1)}_{\underline{j}}$$



$v_1(1,0)$ è il VETTORE componente di $\underline{v}$ lungo la direz. dell'asse x e analog. per $v_2(0,1)$



usando piani paralleli ai piani coordinati, passanti per P



proiezione ortogonale su z fatta mediante un piano

proiettando P su xOy (estraendo le coord. nel piano) e sull'asse z per trovare la quota

proiez. ortog. su xOy fatta con una retta

Come determino le coordinate di P in un sist. di rif. cartesiano ortogonale

V3.3

Dico comb. lineare di $\underline{u}, \underline{v}, \dots, \underline{w}$ ordinatamente mediante gli scalari $a, b, \dots, c$ (nello stesso numero dei vettori) il vettore

$$a\underline{u} + b\underline{v} + \dots + c\underline{w}$$

$\underline{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad$ $\underline{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$\underline{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ notazione per l'insieme di n-uple

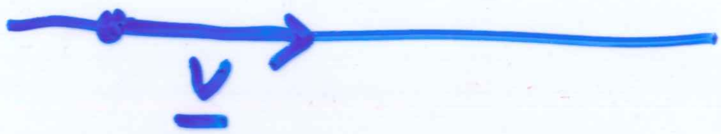
---

Dico che $\underline{u}, \underline{v}, \dots, \underline{w}$ sono indipendenti se nessuno di essi può essere scritto come comb. lineare dei restanti

$\underline{u} = (1, 0, 0)$ $\quad$ $\underline{v} = (0, 1, 0)$ $\quad$ $\underline{w} = (2, 3, 0)$

$\underline{w} = 2\underline{u} + 3\underline{v} \Rightarrow$ sono dipendenti

ESEMPI su dipendenza e indip. V3.4



in $\mathbb{R}^1$

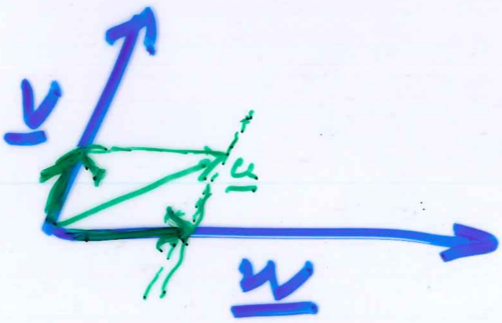
$\underline{w}$ dipende da $\underline{v}$ $\Longleftrightarrow$

$$\underline{w} = a\,\underline{v} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ tutti gli altri vettori che stanno in $\mathbb{R}^1$ sono dip. da $\underline{v}$

---

in $\mathbb{R}^2$ 2 vettori che non abbiano la stessa direz. sono indip.



ogni altro vettore $\underline{u}$ risulta dipend. da essi

---

in $\mathbb{R}^3$ 3 vettori non complanari sono indipendenti

4 sono certamente dipendenti