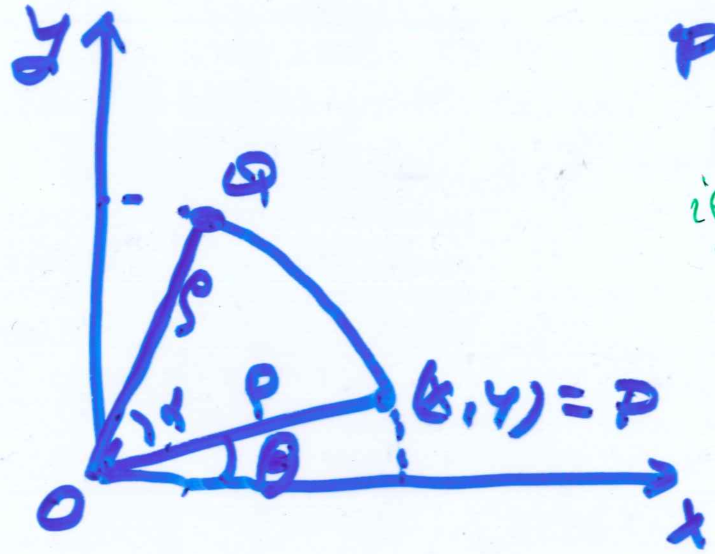


Dato il punto P di coordinate:

$$P \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

il punto Q ottenuto ruotando P di α radianti intorno a O è

$$Q = \begin{cases} x' = \rho \cos(\theta+\alpha) \\ y' = \rho \operatorname{sen}(\theta+\alpha) \end{cases}$$

Traduciamo su i numeri complessi:

Se

$$z = \underbrace{\rho\cos\theta}_{a} + i\,\underbrace{\rho\operatorname{sen}\theta}_{b} =$$

$$= \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

allora

$$z' = \rho(\cos(\theta+\alpha) + i\operatorname{sen}(\theta+\alpha))$$

è il ruotato di z di un angolo di α rad. Ma, usando le formule di addizione:

$$= \rho(\cos\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha + i(\operatorname{sen}\theta\cos\alpha + \cos\theta\operatorname{sen}\alpha))$$

e ricordando la def. di prodotto di numeri complessi:

$$= \underbrace{\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}\cdot(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

$$= z\cdot(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

Determinare i numeri $z \in \mathbb{C}$ t.c.

$(z-i)^4 = 1+\sqrt{3}\,i$

Mi viene chiesto:

$t = z-i$ quando è una radice quarta di $1+\sqrt{3}\,i$?

$$t^4 = 1+\sqrt{3}\,i = w$$

triang. equilatero poiché l'altezza coincide con le mediane e quindi OP = PA e inoltre OP = OA in quanto raggi della stessa circonfer.

$$|w| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\arg w = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$|t_k| = \sqrt[4]{2} \qquad \arg t_k = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

. Uso le formule di "addizione" per calcolarne coseno e seno:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

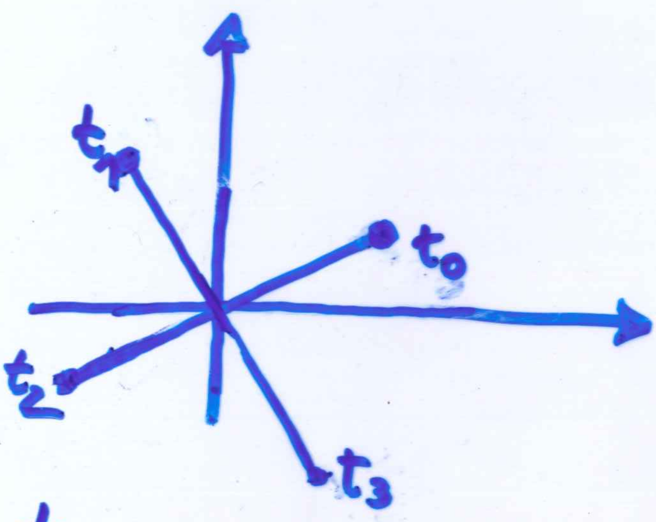
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Quindi:

$$t_0 = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = z_0 - i$$

$$\Rightarrow z_0 = \frac{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{72}}{4} + i\left(\frac{\sqrt[4]{72}-\sqrt[4]{8}}{4}+1\right)$$



$$t_1 = -\frac{\sqrt[4]{72}-\sqrt[4]{8}}{4} + i\,\frac{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{72}}{4}$$

$$z_1 = t_1 + i = \frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{72}}{4} + i\left(\frac{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{72}+4}{4}\right)$$

$$t_2 = -t_0 \Rightarrow z_2 = -t_0 + i = -\frac{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{72}}{4} + i\left(\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{72}}{4}+1\right)$$

$$t_3 = -t_1 \Rightarrow z_3 = -t_1 + i = \frac{\sqrt[4]{72}-\sqrt[4]{8}}{4} + i\left(1-\frac{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{72}}{4}\right)$$

Osservazione sulla costruz. di t_1 dato t_0:

$z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$: se faccio la rotaz. di di $\frac{\pi}{2}$, cioè $(\ )\cdot i$ ho

$$z\cdot i = \rho(-\text{sen}\,\theta + i\cos\theta)$$

cioè la parte reale del numero ruotato di $\frac{\pi}{2}$ è l'opposto di $\text{Im}\,z$ e la parte immaginaria di $z\cdot i$ è $\text{Re}\,z$.

Esercizi sulla dipendenza/indip. di vettori:

$\underline{u} = (1,0,1)$ $\underline{v} = (1,1,0)$

$\underline{w} = (0,1,1)$

Sono dipendenti? $\iff$ uno dei 3 si può scrivere come comb. lin. degli altri due.

Ad es. esistono $x, y \in \mathbb{R}$ t.c. $\underline{u} = x\,\underline{v} + y\,\underline{w}$?

$(1,0,1) = x\,(1,1,0) + y\,(0,1,1)$

$\Updownarrow$

$(1,0,1) = (x,x,0) + (0,y,y)$

$\Updownarrow$

$(1,0,1) = (x+0,\ x+y,\ 0+y)$

$\Updownarrow$

$(1,0,1) = (x,\ x+y,\ y)$. Osservo che: due vettori sono = se e solo se hanno le stesse componenti

$\begin{cases} x=1 \\ x+y=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow 1+1=0$ IMP. $\Rightarrow$ non $\exists$ $x,y\ldots$

Visto che $\underline{v}$ e $\underline{w}$ erano indipendenti in quanto nessuno dei due era multiplo dell'altro e il terzo vettore $\underline{u}$ è indip. da $\underline{v}$ e $\underline{w}$, allora i 3 vett. sono indipendenti.

Perché questa lunga giustificazione?
Prendiamo:

$\underline{u} = (1,0,1) \quad \underline{v} = (1,1,0) \quad \underline{w} = (2,2,0)$

Se non osservo che $\underline{w} = 2\underline{v}$ e quindi questi 2 vett. sono dipendenti potrei impostare il sist. come prima

e quindi anche i 3 vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ sono dipend.,

$\underline{u} = x\underline{v} + y\underline{w}$

$$\begin{cases} 1 = x+2y \\ 0 = x+2y \\ \boxed{1 = 0} \text{ IMPOSS.} \end{cases}$$

e dedurre

la terna è indip.

AFFERMAZIONE FALSA

NO

poiché $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono dip.

L'ins. di vettori $\underline{u}, \underline{v}, \dots, \underline{w}$ è indipendente $\Leftrightarrow$

$$a\underline{u} + b\underline{v} + \dots + c\underline{w} = \underline{0} \Rightarrow a = b = \dots = c = 0$$

(ATTENZIONE: non $\Leftarrow$; sarebbe un'implicazione banale poiché per ogni insieme $\{\underline{u}, \underline{v}, \dots, \underline{w}\}$ $0\underline{u} + 0\underline{v} + \dots + 0\underline{w} = \underline{0} + \underline{0} + \dots + \underline{0} = \underline{0}$)

è il modo per evitare di dover controllare, per ogni vettore aggiunto all'insieme che esso non dipende da quelli presi in esame in precedenza.

Applicazione del criterio appena enunciato.

$\underline{v} = (1, 1, 0)$ $\quad \underline{w} = (2, 2, 0)$

esistono $a, b \neq 0$, t.c. $a\underline{v} + b\underline{w} = \underline{0}$?

$$2\underline{v} + (-1)\underline{w} =$$
$$= 2(1, 1, 0) - (2, 2, 0) = (0, 0, 0) = \underline{0}$$

$\Rightarrow \underline{v}, \underline{w}$ sono dipendenti poiché abbiamo fatto vedere che non vale la condiz. espressa dal criterio

Esercizio. $\underline{u} = (1, 2, 4)$, $\underline{v} = (0, 1, -1)$, $\underline{w} = (k, 0, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.

Per quali valori di k quei 3 vettori sono indipendenti?

Utilizzo il criterio appena enunciato. Considero il sistema:

$(0,0,0) = x(1,2,4) + y(0,1,-1) + z(k,0,0)$

$$\begin{cases} x + 0 + kz = 0 \\ 2x + y + 0 = 0 \\ 4x - y + 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + kz = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x \\ 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ kz = 0 \end{cases}$$

$kz = 0$ → se $k = 0$ z qque
→ se $k \neq 0$ $z = 0$

$\Rightarrow$ se $k \neq 0$ l'unica sol. del sist. è $x = y = z = 0$ cioè i 3 vett. sono indipendenti.

$\Rightarrow$ se $k = 0$ sono sol. del sist. tutti i coeff della forma

$x = 0$, $y = 0$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$

e quindi i 3 vett. sono dip..

In effetti se $k = 0$ $\underline{w} = (0,0,0)$ e tale vettore è sempre dipendente, da qualunque altro vettore.

Esercizio. $\underline{u} = (1,2,4)$, $\underline{v} = (0,1,-1)$, $\underline{w} = (1,0,0)$ (sono indip. in $\mathbb{R}^3$ vedi es. prec.; essendo 3 sono anche un sist. di generatori). Considero $\underline{a} = (3,5,-6)$: quali sono le sue componenti(*) rispetto alla base formata da $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$?

Cerco $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ t.c.

$$x\underline{u} + y\underline{v} + z\underline{w} = \underline{a}$$

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x + y = 5 \\ 4x - y = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + z = 3 \\ 2x + y = 5 \\ 6x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1/6 \\ y = 5 + 1/3 = 16/3 \\ z = 3 + 1/6 = 19/6 \end{cases}$$

queste sono le componenti di $\underline{a}$ rispetto (ordinatamente) a: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$, cioè:

$$\underline{a} = -\frac{1}{6}\underline{u} + \frac{16}{3}\underline{v} + \frac{19}{6}\underline{w}$$

* sono numeri reali