Soluzione di esercizi assegnati. Risolvere:

$|z| = -i z^3.$

conviene passare in f. trigonom. e quindi prima chiedersi

$z=0$ è sol. ?

Sì: una prima sol. è $\boxed{z^*=0}$. Sia ora

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) \neq 0 \Rightarrow \rho \neq 0$$

sostituisco

$$\rho = -i\rho^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

$\rho \neq 0 \Rightarrow$ semplifico per ρ
moltiplico i $\Rightarrow$ $i(-i)=1$

$$i = \rho^2(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

i 2 numeri sono $= \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1 = \rho^2 \\ \frac{\pi}{2} = 3\theta - 2k\pi \end{cases} \quad \rho>0 \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

3 radici che si ottengono per $k = 0, \pm 1$

$$z_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

$$z_1 = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} \qquad z_{-1} = \boxed{-i}$$

Risolvere

$$z^2+2z+3=0.$$

Sol.

$$z = -1 \pm \sqrt{1-3} = -1 \pm \sqrt{-1\cdot 2} =$$
$$= -1 \pm \sqrt{2}\, i$$

o, meglio:

$$z^2+2z+3 = (z^2+2z+1)+2 =$$
$$= (z+1)^2+2 = 0$$

$$(z+1)^2 = -2$$

$$|-2| = 2 \qquad \arg(-2) = \pi + 2\pi k$$

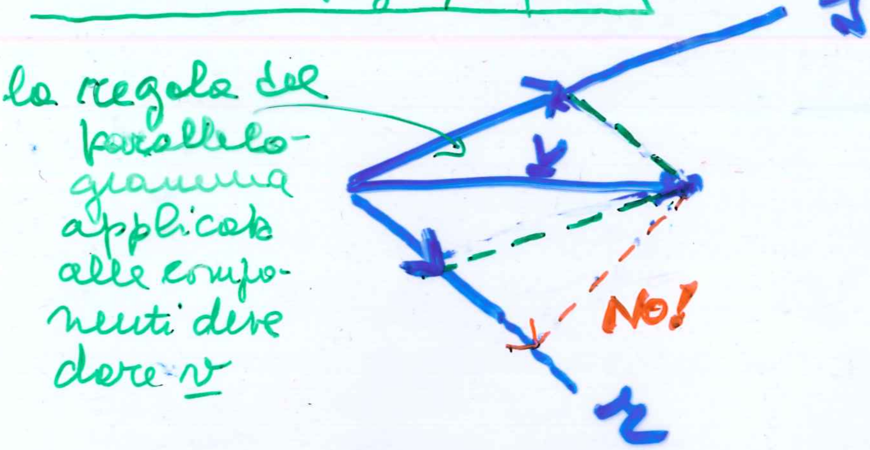
$$z+1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) + i \,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right)$$

$$k=0,1$$

$k=0$

$$z+1 = \sqrt{2}\cdot 1 i \quad \Rightarrow \quad z_0 = -1+\sqrt{2}\, i$$
$$z+1 = \sqrt{2}\,(-1) i \quad \Rightarrow \quad z_1 = -1-\sqrt{2}\, i$$

Commento a pag V4, in fondo



N.B. La scomposizione del vettore $\underline{v}$ lungo 2 direzioni (ad es. quelle di r e s) si fa usando parallele a r e s... non perpendicolari!

(3

$\underline{r} = (a,b)$, $|\underline{r}| = \sqrt{a^2+b^2}$

controllare i conti ad es. su $a=3$, $b=4$, $|\underline{r}|=5$.

$$\left|\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\right| = ? \quad = \left|\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right|$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{1} = 1$$

cioè:

dato un vettore $\underline{r}$ con modulo $|\underline{r}| \neq 1$, per ottenere un <u>versore</u> avente la stessa direz. e lo stesso verso di $\underline{r}$ basta considerare:

$$\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} \Rightarrow$$

la proiezione ORTOGONALE di $\underline{v}$ sulla retta avente la direzione di $\underline{r}$ è

$$\left(\cancel{|\underline{v}|} \cdot \frac{\underline{v} \circ \underline{r}}{\cancel{|\underline{v}|} \cdot |\underline{r}|}\right) \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = \left(\underline{v} \circ \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\right) \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$

In termini di componenti:

Se $\underline{v} = (v_1, v_2)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2)$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = (v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j}) \cdot (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j}) = v_1 \underline{i} \cdot (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j}) + v_2 \underline{j} \cdot (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j}) =$$
$$= (v_1 \underline{i}) \cdot (w_1 \underline{i}) + (v_1 \underline{i}) \cdot (w_2 \underline{j}) + (v_2 \underline{j}) \cdot (w_1 \underline{i}) + (v_2 \underline{j}) \cdot (w_2 \underline{j}) =$$
$$= v_1 w_1 (\underline{i} \cdot \underline{i}) + v_1 w_2 (\underline{i} \cdot \underline{j}) + v_2 w_1 (\underline{j} \cdot \underline{i}) + v_2 w_2 (\underline{j} \cdot \underline{j}) =$$
$$= v_1 w_1 + v_2 w_2$$

$\underline{i} \cdot \underline{j} = 0 = \underline{j} \cdot \underline{i}$
$\underline{i} \cdot \underline{i} = 1 = \underline{j} \cdot \underline{j}$

$$\boxed{\text{se } \underline{v} = (v_1, v_2, v_3)\ ;\ \underline{w} = (w_1, w_2, w_3)\ :\ \underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}$$

in $\mathbb{R}^3$

Es 1 Trovare l'angolo tra i due vettori $\underline{v} = (1, 2, 3)$ e $\underline{w} = (3, -1, 2)$:

$$1 \cdot 3 + 2(-1) + 3 \cdot 2 = \underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cos\alpha = \sqrt{1+4+9}\,\sqrt{9+1+4}\,\cos\alpha$$

$\Rightarrow \cos\alpha =$ vedi pag V5.1

In generale:

Es 2 Trovare un vettore ortogonale a $\underline{v} = (-1, 2, 1)$ e a $\underline{w} = (3, 1, 4)$ di modulo 1.

$\underline{u} = (x, y, z)$

$\underline{u} \perp \underline{v} \iff$ Vedi pag V5.2

$\underline{u} \perp \underline{w} \iff$

$|\underline{u}| = ..$

Es 3 I vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ dell'esercizio precedente sono indipendenti? **Sì**

$\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono indip. poiché nessuno dei due è multiplo dell'altro. Se fosse $\underline{u} = a\underline{v} + b\underline{w}$, moltiplicando per $\underline{v}$ e per $\underline{w}$

SEGUE A PAG 4

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = a\,\underline{v}\cdot\underline{v} + b\,\underline{w}\cdot\underline{v} = 0$$

$$\underline{u}\cdot\underline{w} = a\,\underline{v}\cdot\underline{w} + b\,\underline{w}\cdot\underline{w} = 0$$

$$\underline{w}\cdot\underline{v} = \underline{v}\cdot\underline{w} = c$$

$$\begin{cases} a\,|\underline{v}|^2 + bc = 0 \\ a\,c + b\,|\underline{w}|^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\dfrac{c}{|\underline{v}|^2}\, b & \qquad (|\underline{v}| \neq 0\ !) \\ \left(\dfrac{-c^2}{|\underline{v}|^2} + |\underline{w}|^2\right)\cdot b = 0 \end{cases}$$

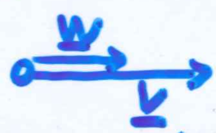
Il coefficiente $k = |\underline{v}|^2|\underline{w}|^2 - c^2$ di $\dfrac{b}{|\underline{v}|^2}$ può valere 0? Se sì:

$|\underline{v}|^2|\underline{w}|^2 - (\underline{v}\circ\underline{w})^2 = 0$ cioè $\dfrac{(\underline{v}\circ\underline{w})^2}{|\underline{v}|^2|\underline{w}|^2} = 1$

cioè $\dfrac{|\underline{v}\circ\underline{w}|}{|\underline{v}|\,|\underline{w}|} = 1$. Ma $\dfrac{|\underline{v}\circ\underline{w}|}{|\underline{v}|\,|\underline{w}|} = \cos\theta$

$\Rightarrow |\cos\theta| = 1 \iff \cos\theta = \pm 1 \iff$

$\iff \theta = 0$ o $\theta = \pi$.



In entrambi i casi i due vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ NON SAREBBERO INDIPENDENTI, contro quanto osservato prima. Dunque $k \neq 0$

$\Rightarrow$ la sol. della II eq. è $b = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la sol " I eq. è $a = 0 \Rightarrow \underline{u} = \underline{0}$!

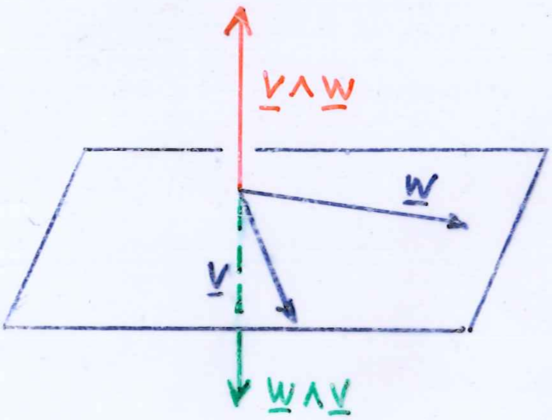
Cioè
un vettore $\underline{u}$ ortogonale
a due vettori indip. $\underline{v}$, $\underline{w}$
può essere comb. lin. di $\underline{v}$ e $\underline{w}$
solo se è il vettore

$$0\underline{v} + 0\underline{w} = \underline{0}$$

Il nostro vettore $\underline{u}$ non era
nullo e quindi non è
comb. lin. di $\underline{v}$, $\underline{w}$.

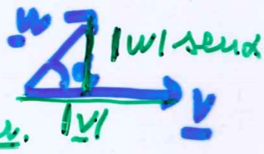
Prodotto vettoriale di $\underline{v}$ e $\underline{w}$ nello spazio di dim. 3

- $|\underline{v}\wedge\underline{w}| = |\underline{v}|\cdot|\underline{w}|\sin\alpha$
- $\underline{v}\wedge\underline{w}$ ortogonale tanto a $\underline{v}$ che a $\underline{w}$
- $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v}\wedge\underline{w}$ è una terna DESTRORSA



- anticommutativo
  $\underline{w}\wedge\underline{v} = -\underline{v}\wedge\underline{w}$
- $(t\underline{v})\wedge\underline{w} = t(\underline{v}\wedge\underline{w})$
- $\underline{v}\wedge\underline{v} = \underline{0}$
- distributivo
  $\underline{u}\wedge(\underline{v}+\underline{w}) = \underline{u}\wedge\underline{v} + \underline{u}\wedge\underline{w}$

Geometricamente $|\underline{v}\wedge\underline{w}|$ = area del parallelogramma di lati $\underline{v}$ e $\underline{w}$.



$\underline{i}\wedge\underline{j} = \underline{k}$, $\underline{j}\wedge\underline{k} = \underline{i}$, $\underline{k}\wedge\underline{i} = \underline{j}$ ....
$\underline{j}\wedge\underline{i} = -\underline{k}$ $\quad$ $\underline{k}\wedge\underline{j} = -\underline{i}$ $\quad$ $\underline{i}\wedge\underline{k} = -\underline{j}$ → VEDI PAG 6

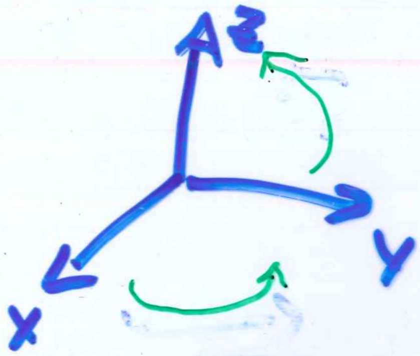
Dunque se $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\underline{v}\wedge\underline{w} = (v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k})\wedge(w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k}) = \text{DISTR.}$$
$$= (v_2w_3 - v_3w_2)\underline{i} + (v_3w_1 - v_1w_3)\underline{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\underline{k}$$

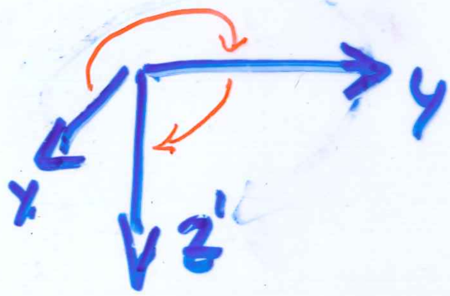
VEDI PAG. 7 su un esempio

$\boxed{\text{Es2 pag5}}$ $\quad$ $\underline{u} = \dfrac{\underline{v}\wedge\underline{w}}{|\underline{v}\wedge\underline{w}|}$ oppure il suo opposto

VEDI PAG 8

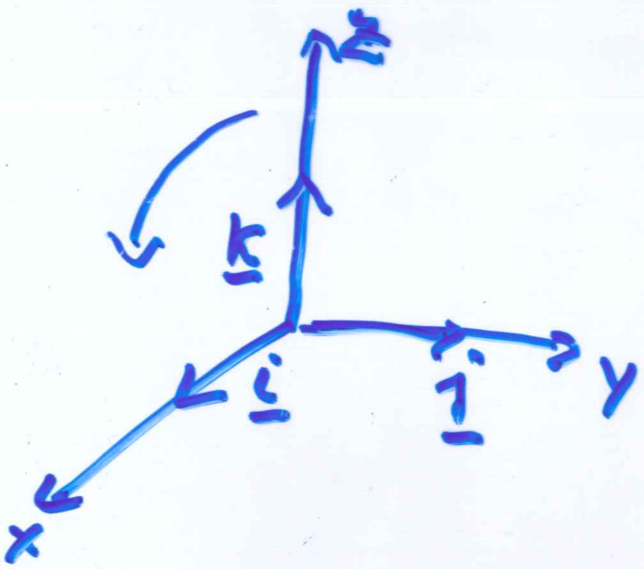


xyz terna destrorsa



xyz' terna sinistrorsa

In particolare:



$\underline{i} \wedge \underline{j}$ ha direz. e verso dell'asse $z \Rightarrow$ è un multiplo di $\underline{k}$

$$|\underline{i} \wedge \underline{j}| = |\underline{i}|\,|\underline{j}| \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\Longrightarrow \underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}$$

$\underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}$

$\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}$

$\underline{j} \wedge \underline{i} = -\underline{k}$, $\underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{i}$, $\underline{i} \wedge \underline{k} = -\underline{j}$

Questo permette il calcolo di

$(v_1, v_2, v_3) \wedge (w_1, w_2, w_3)$

7

$\underline{v} = (1, 2, 3) \quad \underline{w} = (6, 7, 8)$

$\underline{v} \wedge \underline{w} = (1\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}) \wedge (6\underline{i} + 7\underline{j} + 8\underline{k}) =$

rozpr. distr. $= 1\underline{i} \wedge 6\underline{i} + 1\underline{i} \wedge 7\underline{j} + 1\underline{i} \wedge 8\underline{k} +$

$+ 2\underline{j} \wedge 6\underline{i} + 2\underline{j} \wedge 7\underline{j} + 2\underline{j} \wedge 8\underline{k} +$

$+ 3\underline{k} \wedge 6\underline{i} + 3\underline{k} \wedge 7\underline{j} + 3\underline{k} \wedge 8\underline{k} =$

[illegible] $= (1 \cdot 6)(\underline{i} \wedge \underline{i}) + (1 \cdot 7)(\underline{i} \wedge \underline{j}) + (1 \cdot 8)(\underline{i} \wedge \underline{k}) +$

$+ (2 \cdot 6)(\underline{j} \wedge \underline{i}) + (2 \cdot 7)(\underline{j} \wedge \underline{j}) + (2 \cdot 8)(\underline{j} \wedge \underline{k}) +$

$+ (3 \cdot 6)(\underline{k} \wedge \underline{i}) + (3 \cdot 7)(\underline{k} \wedge \underline{j}) + (3 \cdot 8)(\underline{k} \wedge \underline{k})$

$= \underline{i}\,(2 \cdot 8 - 3 \cdot 7) + \underline{j}\,(3 \cdot 6 - 1 \cdot 8) +$

$+ \underline{k}\,(1 \cdot 7 - 2 \cdot 6)$

$$\begin{array}{ccc} 2^\circ & & \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{cc} 3^\circ & 1^\circ \end{array}$$

$$\underline{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}_{1^\circ} + \underline{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}_{2^\circ} + \underline{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}_{3^\circ}$$

$- \quad + \quad -$

$+ \quad - \quad +$

Es. pag V6

$\underline{v} = (-1, 2, 1) \quad \underline{w} = (3, 1, 4)$

Un vettore ortogonale a $\underline{v}$ e $\underline{w}$ è

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \underline{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

1 2 3 2 3 1 3 1 2

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$= \underline{i}\,(8-1) + \underline{j}\,(3+4) + k\,(-1-6)$$

$$= 7\underline{i} + 7\underline{j} - 7\underline{k} = 7(1, 1, -1)$$

$$|\underline{v} \wedge \underline{w}| = 7\sqrt{1+1+1} = 7\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ vettore ort. a $\underline{v}$ e $\underline{w}$ di mod 1:

$$\left(\frac{7}{7\sqrt{3}}, \frac{7}{7\sqrt{3}}, -\frac{7}{7\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

oppure $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Prodotto misto $\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w})$, $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$

il risultato è un numero!

$|\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w})|$ geometricamente esprime:

VEDI PAG 9

quindi si annulla se e solo se:

i 3 vettori sono dipendenti

Se $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

: DETERMINANTE DELLA MATRICE $\begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{pmatrix}$

GEOMETRIA CON I VETTORI:

Equazione parametriche della retta

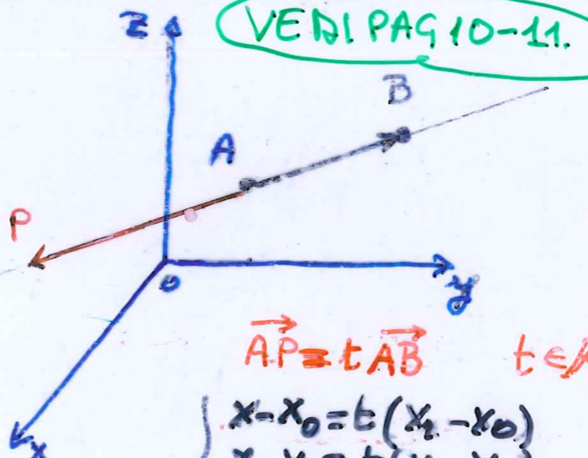
una retta è nota:

- dati due suoi punti distinti $A = (x_0, y_0, z_0)$ $B = (x_1, y_1, z_1)$

oppure

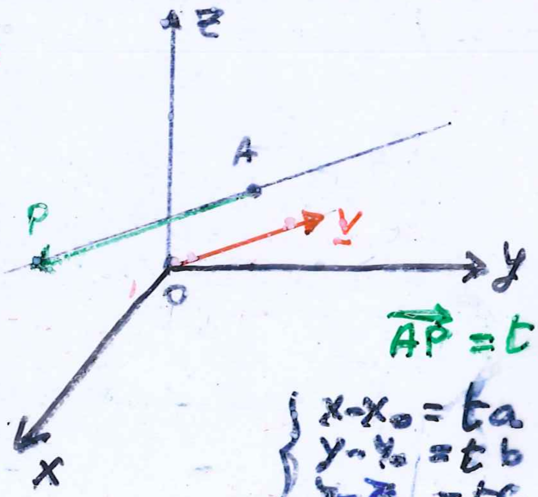
- dato un suo punto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e una direzione $\underline{v} = (a, b, c)$ cui la retta è parallela

VEDI PAG 10-11.



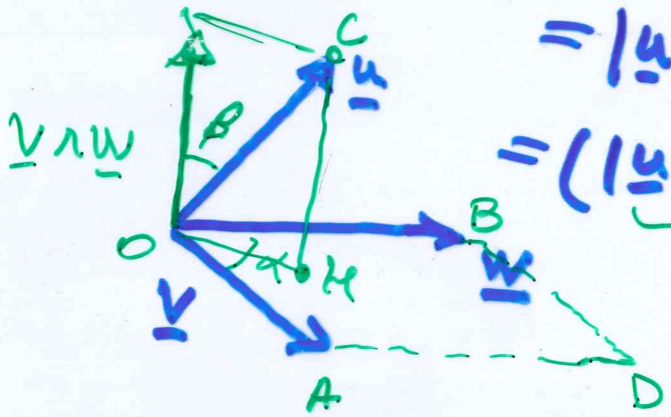
$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - x_0 = t(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 = t(z_1 - z_0) \end{cases}$$



$\overrightarrow{AP} = t\underline{v}$ $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases}$$



$\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) =$

$= |\underline{u}| \cdot |\underline{v} \wedge \underline{w}| \cos\beta =$

$= \underbrace{(|\underline{u}| \cos\beta)}_{CH} \underbrace{|\underline{v}||\underline{w}| \sin\alpha}_{\text{area di } OADB}$

volume del parallelepipedo che ha 3 spigoli coincidenti con i 3 vettori, $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$

può diventare 0 quando

1) l'altezza è 0 $\Rightarrow C = H$

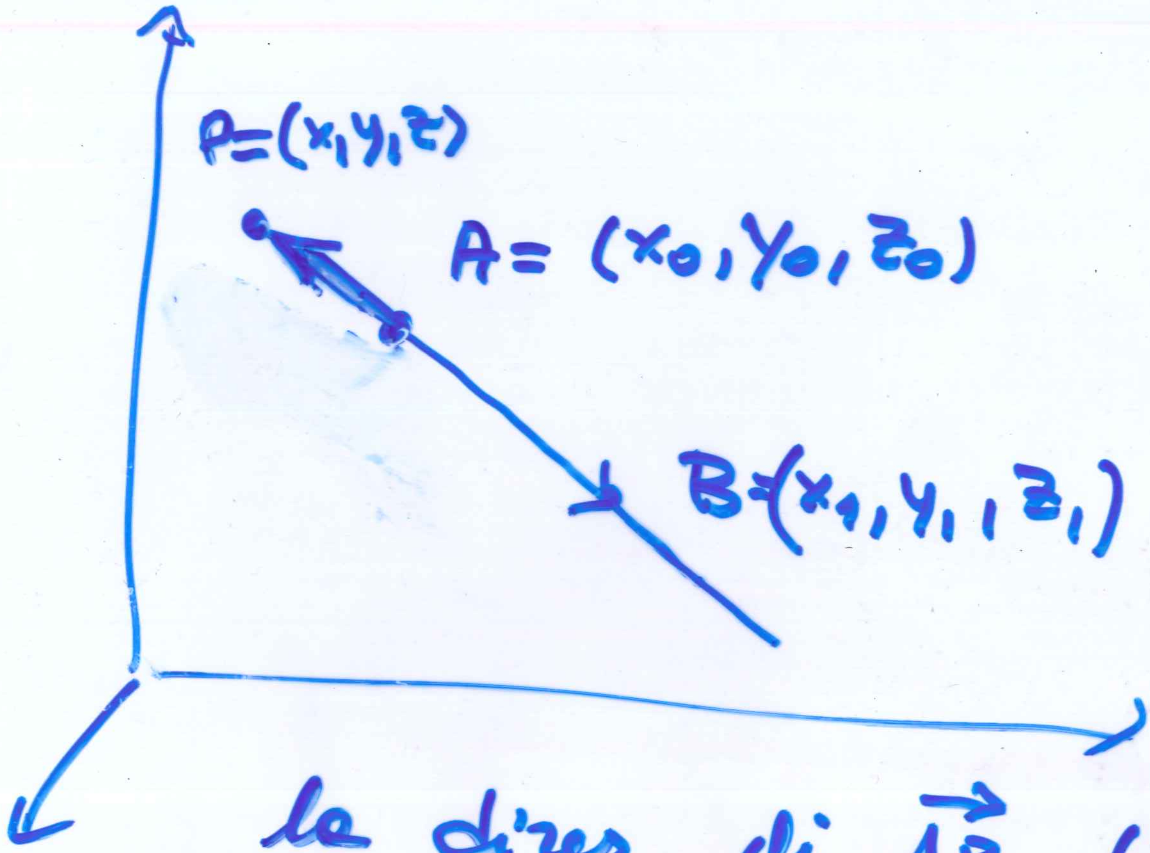
$\Rightarrow \vec{OC}$ è complanare con $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ $\Rightarrow$ i 3 vett. sono dipendenti.

2) l'area del parall. di base è 0.

cioè $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono uno multiplo dell'altro $\Rightarrow$ $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ sono dipendenti.

$\Rightarrow$ Se $\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = 0$ i 3 vettori sono dipendenti.

Vale anche il viceversa.



la direz. di $\overrightarrow{AP}$ (vettore che congiunge il punto fissato A con un ogni punto P della retta) deve essere "allineato" con $\overrightarrow{AB}$, cioè avere = direzione

quindi $\overrightarrow{AP}$ deve essere multiplo di $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AP} = k\,\overrightarrow{AB}$$

$$\parallel$$

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = k\,(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$$

$$\begin{cases} x-x_0 = k\,(x_1-x_0) \\ y-y_0 = k\,(y_1-y_0) \\ z-z_0 = k\,(z_1-z_0) \end{cases}$$

Retta per $A=(1,2,3)$

$B=(5,7,9)$

$\overrightarrow{AP}$ $\quad$ $k\overrightarrow{AB}$

$(x-1,\ y-2,\ z-3)=(5-1,\ 7-2,\ 9-3)k$

$(x-1,\ y-2,\ z-3)=(4,5,6)k$

$$\begin{cases} x-1=4k \\ y-2=5k \\ z-3=6k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1+4k \\ y=2+5k \\ z=3+6k \end{cases}$$

$P=A+k\overrightarrow{AB}$