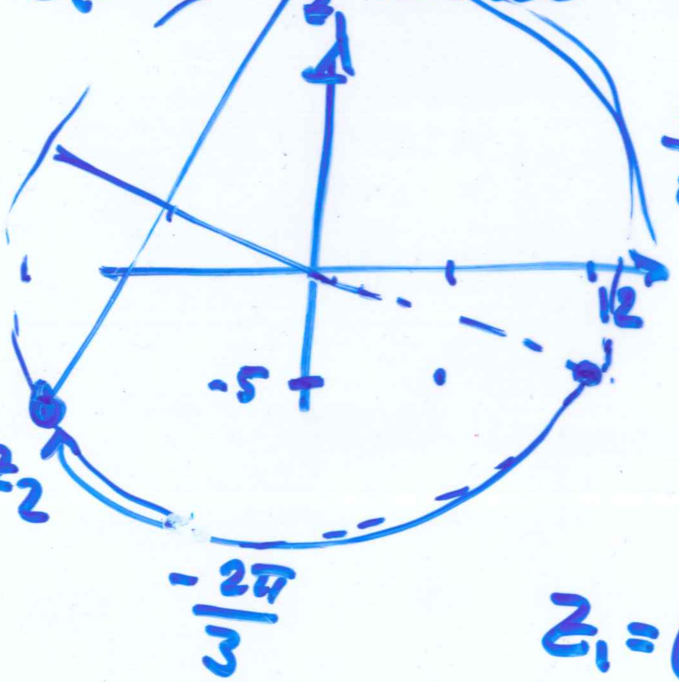
È dato $z = 12 - 5i$ che è una radice terza di un numero complesso w. Quali sono le altre?



$$z_1 = z\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = z\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_1 = (12-5i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$
$$= -6 + \frac{5\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{5}{2} + 6\sqrt{3}\right)$$

$$z_2 = (12-5i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6 - \frac{5\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{5}{2} - 6\sqrt{3}\right)$$

$$w = z^3 = (12-5i)^3 = \underline{12^3} - 3\cdot 12^2 \cdot 5i - \underline{12\cdot 25\cdot 3} + 5^3 i$$

$$= 12(144 - 75) + 5(25 - 3\cdot 144)i$$

MATE ASS 11.14

$\underline{u} = (1,1,0)$, $\underline{v} = (0,2,-1) \in \mathbb{R}^3$

Trovare $\underline{w} \neq \underline{0}$ che sia ortogonale a entrambi. È unico?

Il modo più veloce per trovarne uno è calcolare $\underline{u} \wedge \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$

$= \underline{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \underline{j} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$

$= \underline{i}\,(-1-0) + \underline{j}\,(0-(-1)) + \underline{k}\,(2-0) =$

$= -\underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k} = (-1, 1, 2)$

Verifico $(-1,1,2) \circ (1,1,0) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0$

$(-1,1,2) \circ (0,2,-1) = 0 + 1 \cdot 2 + 2(-1) = 0$

È unico?

no: vanno bene tutti i multipli reali $\neq 0$ di $(-1,1,2)$, cioè i vettori della forma $(-k, k, 2k)$ ove $k \in \mathbb{R}^*$

V8

Es1 Trovare le eq. parametriche della retta passante per $A = (1, -1, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$.

Passare poi a una rappresentazione che non contenga il parametro

ERRORE SUL TESTO: EQUAZIONE CARTESIANA della retta

Appena svolto

Es2 Trovare le eq. parametriche della retta passante per $A = (2, 1, 3)$ e "parallela" al vettore $\underline{v} = (1, -3, 0)$

Passare poi a una rappresentazione che non contenga il parametro

Es3 Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $A = (3, 1, 2)$ e ortogonale alle due rette di equazioni $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ e

$$\frac{x-1}{2} = 3y - 1 = \frac{4z+1}{3}$$

Es4 Il sistema $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4x + y - z = 2 \end{cases}$ rappresenta una retta nello spazio di dimensione 3? Se sì trovarne i COSENI DIRETTORI

ES 1 pag V8

$A=(1,-1,1)$ $B=(0,1,-1)$

retta per AB. Detto P il punto corrente sulla retta, $P=(x,y,z)$

$$\begin{cases} x = 1 + t\,(0-1) \\ y = -1 + t\,(1+1) \\ z = 1 + t\,(-1-1) \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

eq.i param. della retta

$$\begin{cases} \boxed{t = 1 - x} \\ y = -1 + 2(1-x) \\ z = 1 - 2(1-x) \end{cases}$$

dice come t varia in dipendenza da x

somma per avere una eq. più semplice

$$\begin{cases} t = 1 - x \\ 2x + y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

sistema equiv. al precedente

Voglio solo i legami tra x, y, z

$\Rightarrow$ le equazioni cartesiane ~~sono~~ della retta sono due

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

retta per $A = (2,1,3)$ e "parallela" al vettore $\underline{v} = (1,-3,0)$

Passare poi a una rappresentazione che non contenga il parametro

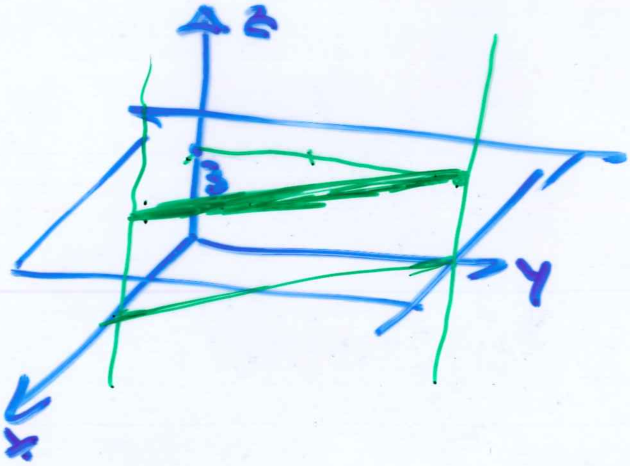
se $P = (x,y,z)$ appartiene alla retta,

$$\overrightarrow{AP} = t\,\underline{v}$$

$$(x-2,\ y-1,\ z-3) = t(1,-3,0)$$

$$\begin{cases} x-2 = 1\cdot t \\ y-1 = -3t \\ z-3 = 0t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-3t \\ z = 3 \end{cases}$$

sono le eq. di una retta in un piano (// a xOy)



Ricavo t dalla 1ª eq. dove t ha coeff 1

$t = x-2$

e sostituisco t nelle restanti eq. in cui compare (la 2ª eq.)

$y = 1-3(x-2)$ cioè $\underline{y = 7-3x}$

↳ rappresenta la retta nel piano $z = 3$

Nello spazio devo ricordare che ci sono 2 legami

$$\begin{cases} y = 7-3x \\ z = 3 \end{cases}$$

← in $\mathbb{R}^3$ questa sola eq. rappresenta un piano // asse z

ES. 3 pag V8

retta per

$A = (3,1,2)$ e $\perp$ alle due rette di

equazioni:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 2+2t \end{cases} \qquad s: \frac{x-1}{2} = 3y-1 = \frac{4z+1}{3}$$

1ª domanda:

Ma s rappresenta una retta?

$$\frac{x-1}{2} = 3y-1 = \frac{4z+1}{3} = t$$

$$\begin{cases} x-1 = 2t \\ 3y-1 = t \\ 4z+1 = 3t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}t \\ z = -\frac{1}{4}+\frac{3}{4}t \end{cases}$$

sono equazioni parametriche di una retta

Quindi le equazioni che descrivono l'insieme s, descrivono una retta

TERMINOLOGIA

$\underline{v}$: "vettore direzione" o "direzionale" della retta

↳ le sue componenti sono dette "parametri direttori"

2ª domanda:

Qual è la direzione di r e di s?

Devo trovare il vettore direz. di r e di s:

$\underline{v}_r = (1, -1, 2)$ $\qquad \underline{v}_s = (2, \frac{1}{3}, \frac{3}{4})$

La direz della retta cercata sarà data da es.

da $\underline{v}_r \wedge \underline{v}_s = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} =$

$= \underline{i}\left(-1\cdot\frac{3}{4} - 2\cdot\frac{1}{3}\right) + \underline{j}\left(2\cdot 2 - 1\cdot\frac{3}{4}\right) + \underline{k}\left(1\cdot\frac{1}{3} - (-1)\cdot 2\right)$

$= \underline{i}\left(-\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) + \underline{j}\left(4 - \frac{3}{4}\right) + \underline{k}\left(\frac{1}{3} + 2\right) =$

$= \underline{i}\left(-\frac{17}{12}\right) + \underline{j}\left(\frac{13}{4}\right) + k\left(\frac{7}{3}\right) = \left(-\frac{17}{12}, \frac{13}{4}, \frac{7}{3}\right)$

oppure da $12(\underline{v}_r \wedge \underline{v}_s) = (-17, 39, 28)$

Ricordo che

La retta deve passare per $A(3,1,2)$

e quindi ha eq. param:

$$\begin{cases} x = 3 + t(-17) \\ y = 1 + t\cdot 39 \\ z = 2 + t\cdot 28 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 - 17t \\ y = 1 + 39t \\ z = 2 + 28t \end{cases}$$

ES 4

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4x + y - z = 2 \end{cases}$$

rappresenta una retta in $\mathbb{R}^3$?

Risolviamo:

$$\begin{cases} x = 2y - 3z + 1 \\ 4(2y - 3z + 1) + y - z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 3z + 1 \\ 9y - 13z + 2 = 0 \end{cases} \leftarrow \text{cerco le sol. di questa eq.}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 3z + 1 \\ z = t \\ 9y = 13t - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{4}{9} + \frac{26}{9}t - 3t + 1 \\ y = -2/9 + 13/9\, t \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5/9 - 1/9\, t \\ y = -2/9 + 13/9\, t \\ z = t \end{cases}$$

passa adesso per $A = \left(\frac{5}{9}, -\frac{2}{9}, 0\right)$

e ha vettore direzione

$$\left(-\frac{1}{9}, \frac{13}{9}, 1\right)$$

$\Rightarrow$ è una retta!

V86

Come stabilire se due rette sono coincidenti, parallele incidenti, sghembe

$$r = \begin{cases} x = 1-5t \\ y = t \\ z = 2-3t \end{cases} \qquad s = \begin{cases} x = -10t \\ y = 2t \\ z = 8-6t \end{cases}$$

1°) differenziare il nome dei parametri
Chiamo s il parametro della retta s

2°) guardo il vettore direzione:

$$\underline{v}_r = (-5, 1, -3) \quad \underline{v}_s = (-10, 2, -6)$$

Noto che $\underline{v}_s = 2\underline{v}_r \Rightarrow r$ e s o coincidono o sono //

Coincideranno se hanno (almeno) 1 punto in comune: uguaglio le coord di ugual nome delle 2 rette. $\exists\, t, s$ che soddisfano:

$$\begin{cases} 1-5t = -10s \\ t = 2s \\ 2-3t = 8-6s \end{cases} \quad \begin{cases} t = 2s \\ 1 = 0 \\ 2 = 8 \end{cases} \Bigg| \text{ IMP. } \Rightarrow \text{ non } \exists\, s, t \Rightarrow r // s$$

V8.7

Se invece prendo:

$$s' = \begin{cases} x = -4 - 10s \\ y = 1 + 2s \\ z = -1 - 6s \end{cases}$$

$r \equiv s'$?

$$\begin{cases} 1 - 5t = -4 - 10s \\ t = 1 + 2s \\ 2 - 3t = -1 - 6s \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 5 - 10s = -4 - 10s & \forall s \\ t = 1 + 2s & \forall t \\ 2 - 3 - 6s = -1 - 6s & \forall s \end{cases}$$

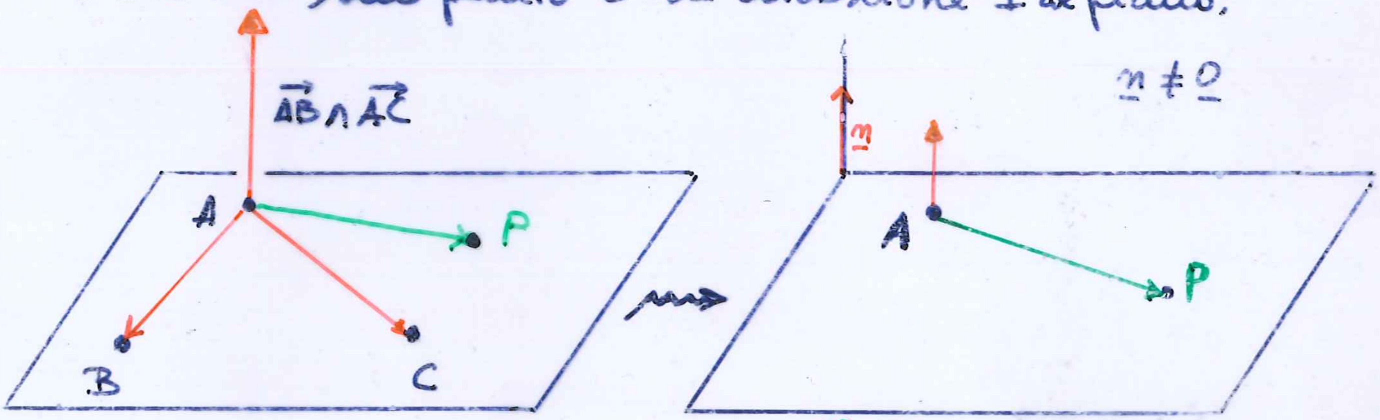
$\Rightarrow$ le due rette hanno 1 punto (anzi tutti) in comune e quindi sono coincidenti.

Se fossi partita da due rette con vettori direzione non proporzionali e avessi trovato che il sistema è risolubile avrei trovato 1 sola coppia $(\bar{s}, \bar{t})$ soluzione e quindi 1 solo punto di intersezione (sostituire $\bar{t}$ nella retta r) $\Rightarrow$ RETTE INCIDENTI. Se avessi trovato che non è risolubile: RETTE SGHEMBE

Equazione cartesiana del piano

Un piano è noto

- dati 3 suoi punti non allineati
- data 1 sua retta e un suo punto non appartenente alla retta
- dato un suo punto e la direzione ⊥ al piano.



$\vec{AP}$ è ortogonale a $\underline{n}$

$$\underline{n} \cdot \vec{AP} = 0$$

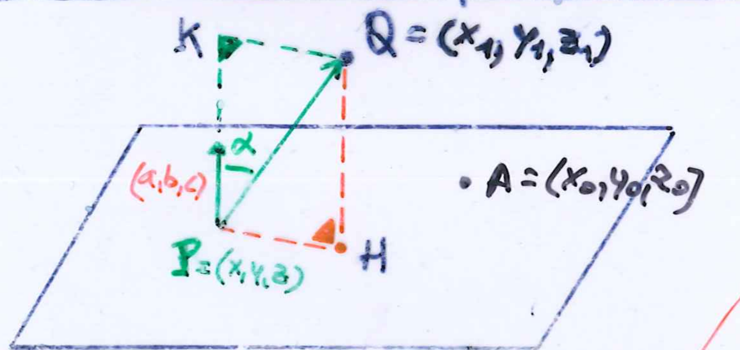
Se $\underline{n} = (a,b,c)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x,y,z)$:

$$(a,b,c) \cdot (x-x_0,\, y-y_0,\, z-z_0) = 0$$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

- $(a,b,c) \cdot (x_0,y_0,z_0) = 0 \iff$ il piano passa per l'origine
- $a = 0 \implies b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$: è // asse x ecc.
- $a = 0$ e $b = 0 \implies c \neq 0$ eq. piano è $z - z_0 = 0$: parallelo a xOy ecc.

Distanza di un punto da un piano



$$\overline{QH} = \overline{PK} = \underbrace{\frac{|\underline{n} \cdot \vec{PQ}|}{|\underline{n}| \cdot \cancel{|\vec{PQ}|}}}_{\cos\alpha} \cancel{|\vec{PQ}|}$$

$$= \frac{|a(x_1 - x) + b(y_1 - y) + c(z_1 - z)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ma $(x,y,z) \in$ piano $\implies$

$$\boxed{ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0}$$

$$= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Significato del termine noto,

Se $|(a,b,c)| = 1$: a meno del segno, rappresenta la distanza da $(0,0,0)$

V9.1

Nell' eq del piano l'uguagliarsi a 0 del coeff. di 1 delle variabili significa parallelismo all'asse di ugual nome, quello di due il parallelismo al piano individuato dagli assi di ugual nome.

Trovo l'eq del piano passante per $O=(0,0,0)$

$A=(1,0,1)$ $B=(0,1,1)$

Sol

passa per O $\Longrightarrow$ avrà eq.

$$ax+by+cz=0$$

Chi è (a,b,c)? ad es. $\vec{OA} \wedge \vec{OB}$

$$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}(-1) + \underline{j}(-1) + \underline{k}\,1 = (-1,-1,1)$$

Scelgo l'opposto

$$(a,b,c) = (1,1,-1)$$

$\Rightarrow$ eq del piano $\quad x+y-z=0$

Se i 3 punti sono più generali:

ad es.

$A=(2,2,0)\quad B=(0,-1,0)\quad C=\underline{\underline{(1,0,0)}}$

osservo che

$$(\vec{CA} \wedge \vec{CB}) \cdot \vec{CP} = 0$$

(descrizione dell'eq. del piano passante per C e $\perp$ $\vec{CA} \wedge \vec{CB}$)

è il prodotto misto $=0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 2-1 & 2-0 & 0-0 \\ 0-1 & -1-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$0(x-1)+0y-3z=0$

cioè $z=0$

V9.3

Calcolare la distanza di $A = (1, 2, 5)$ dal piano passante per $B = (0, 1, 0)$ $C = (1, 0, 0)$ $D = (0, 0, 1)$