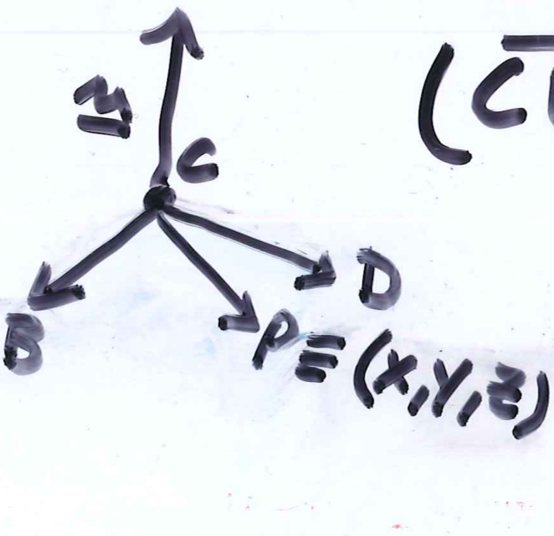
TUTORAGGIO su GEO in 3D

Calcolare la distanza di $A = (1, 2, 5)$ dal piano passante per $B = (0, 1, 0)$ $C = (1, 0, 0)$ $D = (0, 0, 1)$.

SVOLGIMENTO

① Eq. del piano. Fisso il punto C come p.to d'app.le dei vettori $\vec{CB}$ e $\vec{CD}$ che individuano il piano e considero



$$(\vec{CB} \wedge \vec{CD}) \cdot (\vec{CP}) = 0$$

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} (x-1) & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \qquad 2^a \quad 3^a \end{array}$$

$$(x-1)\cdot(1-0) + y(0+1) + z(0+1) = 0$$

$x+y+z=1$

② Distanza di $A=(1,2,5)$ da tale piano: (*)

$x+y+z-1=0$

$$\frac{|1+2+5-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Invece la distanza dal piano di $B=(1,2,-5)$ è

$$\frac{|1+2-5-1|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

vettore direz. del piano: $(1,1,1)$ ha modulo $\sqrt{3}$ se divido l'eq. per $\sqrt{3}$ ho come vettore direzione del piano un versore:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(*) applicare la formula:

$$\frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Considero

$\underline{v} = (1, 1, 1)$

Risultato vero in generale! 3

Che cosa rappresentano le componenti del vettore $\dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$?

rappresentano il cos. dell'angolo formato da $\underline{v}$ con i 3 assi. Infatti:

Qual è l'angolo θ_x formato da $\underline{v}$ con l'asse x?

$$\cos\theta_x = \frac{\underline{v} \cdot \underline{i}}{|\underline{v}|\,|\underline{i}|} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \cdot \underline{i}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (1, 0, 0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 + 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\theta_y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (0, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\theta_z = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (0, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Considero due rette di equazioni:

$$r: \begin{cases} x = 1t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = -3s \\ z = +s \end{cases}$$

Qual è l'angolo tra le due rette?

(Sono incidenti?

$$\begin{cases} t = 1+2s \\ 2t = -3s \\ 3t = s \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 1+2s \\ 2t+3s=0 \\ 3t-s=0 \end{cases} \Longrightarrow s=t=0$$

$0 = 1 + 0$ FALSO

$\Rightarrow$ sistema non risolubile

$\Rightarrow$ non esistono s, t che sostituiti nelle eq. delle due rette diano lo stesso punto $\Rightarrow$ le 2 rette non sono incidenti

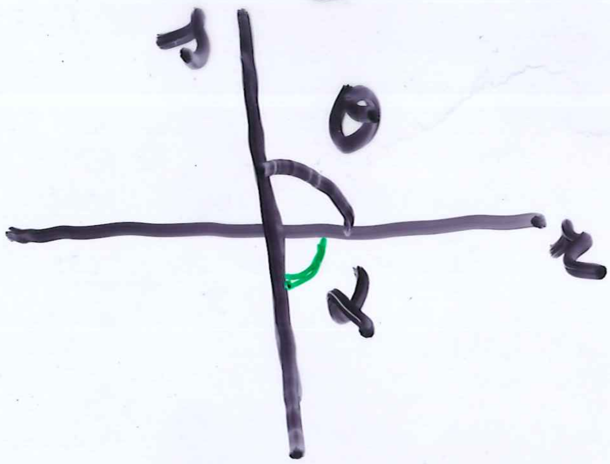
Poiché $\underline{v}_r = (1,2,3)$, $\underline{v}_s = (2,-3,1)$ e i due vettori non sono proporzionali le due rette sono sghembe). Ma:

definisco l'angolo tra le 2 rette come angolo tra $\underline{v}_r$ e $\underline{v}_s$

$$\cos \widehat{\underline{v}_r \underline{v}_s} = \frac{\underline{v}_r \cdot \underline{v}_s}{|\underline{v}_r|\,|\underline{v}_s|} =$$

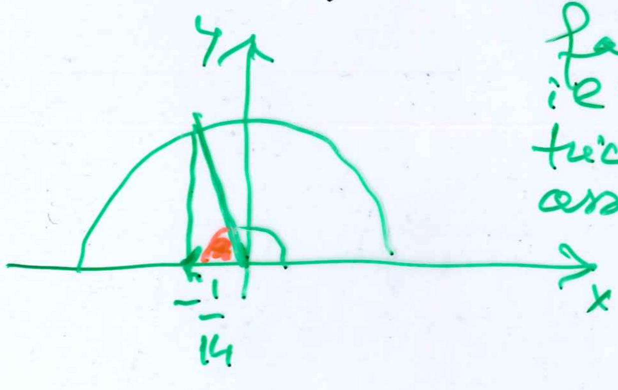
$$= \frac{2-6+3}{\sqrt{14}\,\sqrt{14}} = \frac{-1}{14}$$

$$\Rightarrow \widehat{\underline{v}_r \underline{v}_s} = \arccos\left(\frac{-1}{14}\right)$$

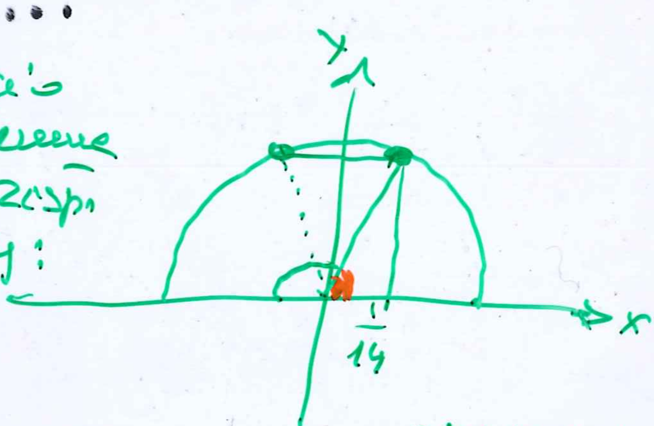


$\theta = \widehat{\underline{v}_r \underline{v}_s}$ è un angolo ottuso poiché $\cos\theta < 0$.

se si chiede l'angolo acuto tra r e s, si deve prendere $\alpha = \pi - \theta$, ovvero ...

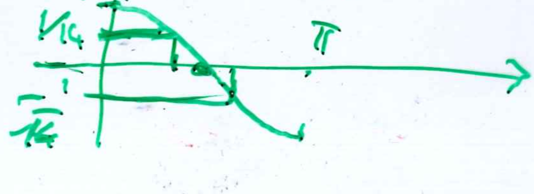


faccio il simmetrico rispetto asse y:



$$\ldots \alpha = \arccos \frac{1}{14}$$

oppure:



Trovare le eq. param. di una retta s che formi un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con la retta di equazioni $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$

e passi per il punto $(1,0,0)$

OSS: troveremo infiniti vettori NON PROPORZIONALI $\Rightarrow$ infinite rette

"La" retta s ha forma $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 0 + bt \\ z = 0 + ct \end{cases}$

devo trovare (a,b,c)

$$\underline{v}_r = (2,-1,1) \Rightarrow \cos\theta = \frac{(2,-1,1)\cdot(a,b,c)}{\sqrt{6}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftarrow$$

$$2a - b + c = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

va bene una qualsiasi soluz.

Ne scelgo una

$a=0 \qquad -b+c=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{b^2+c^2}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}(b^2+c^2)=(c-b)^2 \\ c-b\geq 0 \end{cases}$ (poiché deve essere $=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{b^2+c^2}\geq 0$)

$\Rightarrow \begin{cases} 3(b^2+c^2)=2\left[c^2+b^2-2bc\right] \\ c-b\geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b^2+c^2+4bc=0 \\ c-b\geq 0 \end{cases}$

divido per c^2 (che non può essere $=0$ altrimenti $a=b=c=0$ che non è vett. dir. di una retta)

$\begin{cases} \left(\frac{b}{c}\right)^2+4\frac{b}{c}+1=0 \\ c-b\geq 0 \end{cases} \qquad \frac{b}{c}=-2\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\boxed{b=-2c\pm\sqrt{3}c}$

$c-b=c+2c\mp\sqrt{3}c=(3\mp\sqrt{3})c\geq 0$

sì se prendo $c>0$ ad es. $c=1$.

$(a,b,c) = (0, -2-\sqrt{3}, 1)$

oppure $(0, -2+\sqrt{3}, 1)$

Una retta soluz. del problema è

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = (-2-\sqrt{3})t \\ z = t \end{cases}$$

Verificare se è vero che questa retta forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con

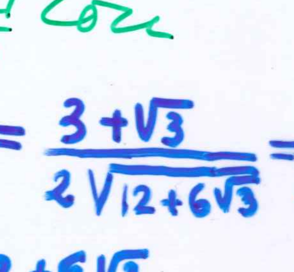
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

$$\frac{(0,-2-\sqrt{3},1)\cdot(2,-1,1)}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}\ \sqrt{6}} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{12+6\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}$$

poiché $(3+\sqrt{3})^2 = 12+6\sqrt{3}$

È dato il piano di eq.

$$3x - y + 2z = 5$$



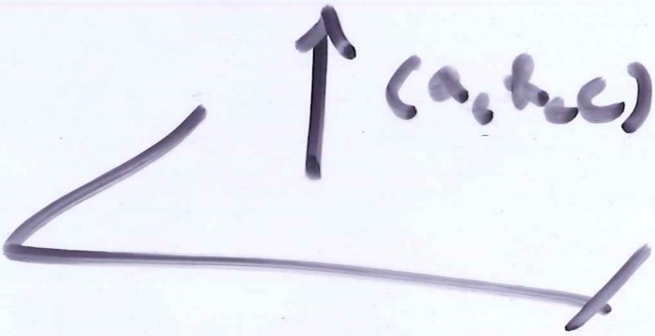
Trovare le eq. della retta $\perp$ al piano e passante per $(0,0,0)$

$\vec{AP} \perp (3,-1,2) \quad \forall P \in$ piano

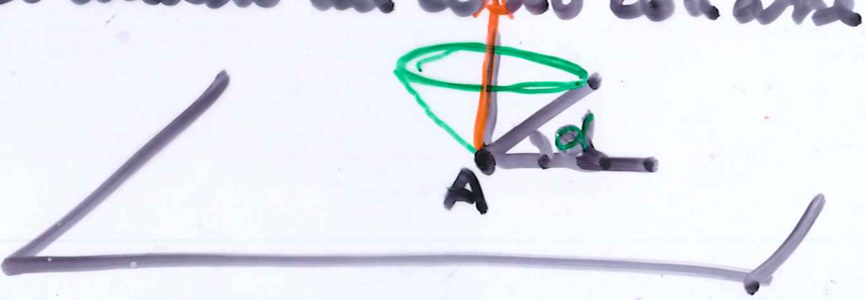
$\Rightarrow \underline{u} = (3,-1,2)$ dà esattamente la direz. $\perp$ piano $\begin{cases} x = 3t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$

IN GENERALE:

Ogni retta $\perp$ ad un piano ($ax+by+cz=d$), ha come vettore direzione il vettore direzione del piano, (a,b,c)



Se invece voglio una retta per A che formi un angolo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ con un piano π ho infinite soluzioni che formano un cono con asse di rotazione la retta per A e $\perp$ al piano.

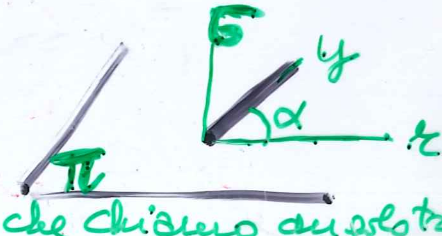


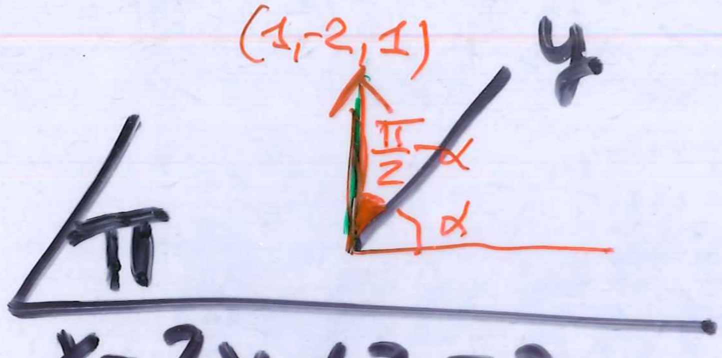
... In realtà dobbiamo precisare la nozione di angolo tra piano e retta. Dato il piano

$$\pi : x - 2y + z = 3$$

qual'è l'angolo formato tra il piano e l'asse y ?

Considero il piano σ che passa per l'asse y ed è $\perp$ a $\pi \Rightarrow \sigma \cap \pi = r$: $\alpha = \widehat{yr}$ è ciò che chiamo angolo tra y e π





$x-2y+z=3$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$

Quanto vale l'angolo $\frac{\pi}{2}-\alpha$?

Il vettore direz del piano è $(1,-2,1)$
quello dell'asse y è $(0,1,0)$
$\Rightarrow$ l'angolo tra una direz ortogonale al piano e l'asse y è

$$\frac{\pi}{2}-\alpha = \arccos\frac{|(1,-2,1)\cdot(0,1,0)|}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{1}}$$

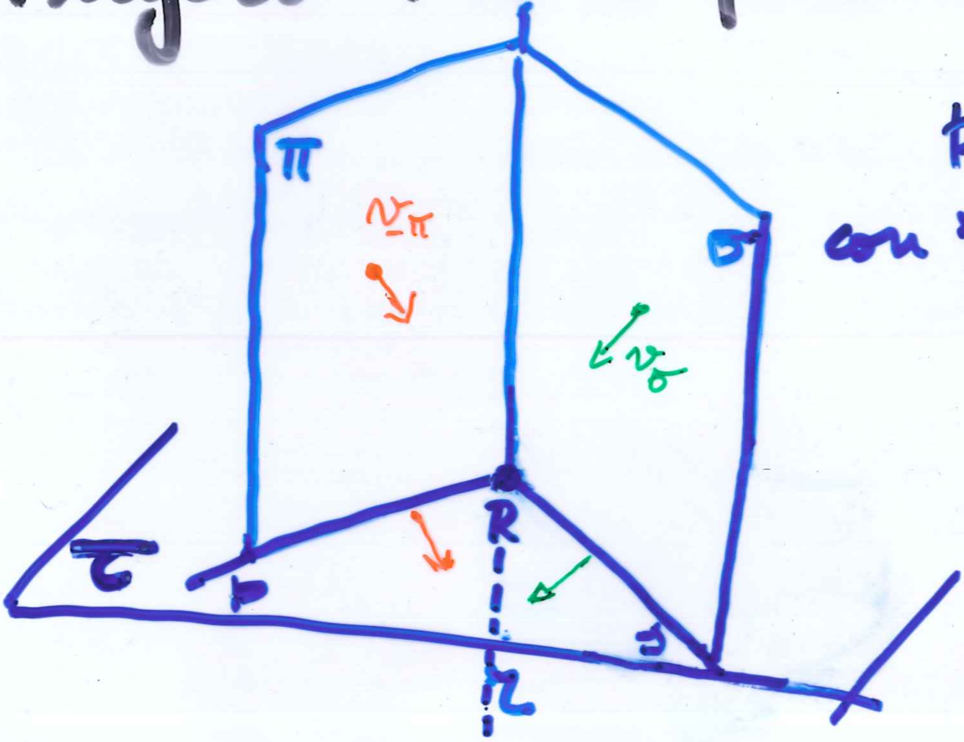
ovvero l'angolo tra il piano e l'asse y è

$$\alpha = \operatorname{arcsen}\frac{|(1,-2,1)\cdot(0,1,0)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{1}} =$$

$$= \operatorname{arcsen}\frac{|-2|}{\sqrt{6}} = \operatorname{arcsen}\frac{2}{\sqrt{6}}$$

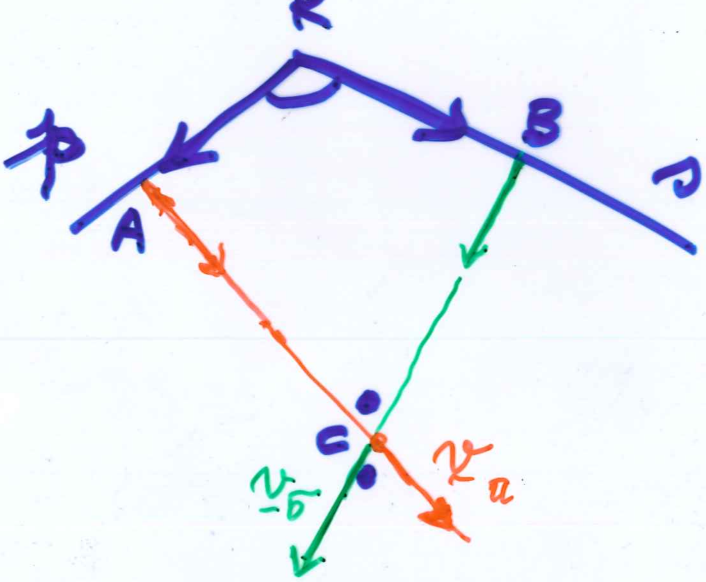
ATTENZIONE: l'angolo tra i due vettori direzione può anche essere ottuso, ma a noi interessa un angolo acuto: per questo prendo il valore assoluto!

Angolo tra 2 piani



piano $\tau \perp r$
con $r = \pi \cap \sigma$

l'angolo tra π e σ è l'angolo tra le rette $p = \pi \cap \tau$ e $s = \sigma \cap \tau$



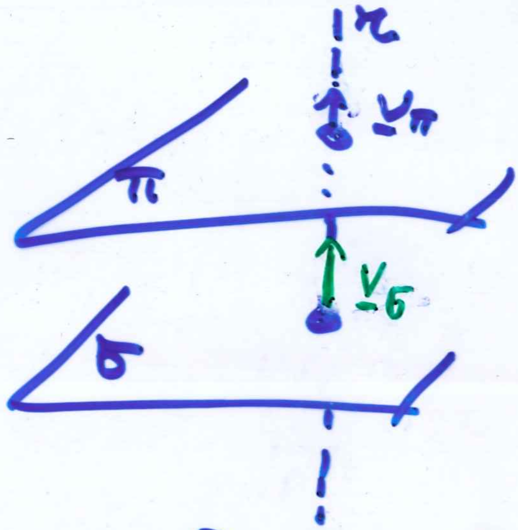
$R\hat{A}C = R\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$

La somma degli angoli interni del quadrilatero è $2\pi \Longrightarrow$

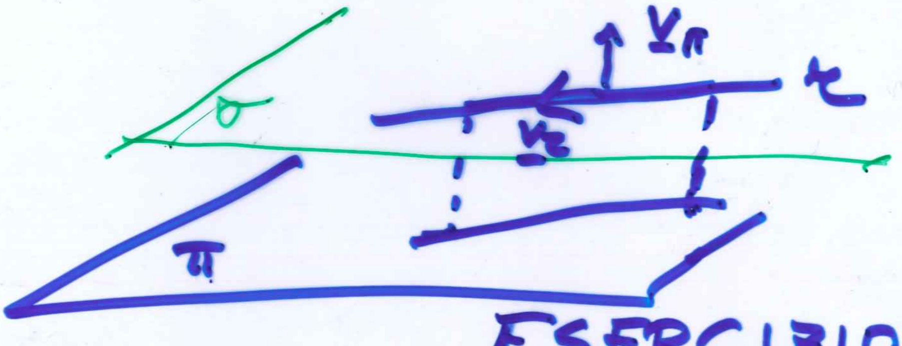
$B\hat{R}A + A\hat{C}B = \pi$

Invece dell'angolo $B\hat{R}A$ calcolo $A\hat{C}B$ cioè l'angolo $\widehat{\underline{v}_\sigma \, \underline{v}_\pi}$

Parallelismo di 2 piani?
Significa che sono perpendicolari a una stessa retta cioè hanno vettore direzionale proporzionale.



Parallelismo retta-piano?



$\underline{v}_r \perp \underline{v}_\pi$

poiché la retta deve giacere in un piano parallelo a π.

ESERCIZIO

Det. le eq. parametriche della retta s che è $\perp$ alla retta di eq.^{i}

$$r: \begin{cases} x = 6t \\ y = -2t \\ z = 5t \end{cases}$$

e parallela al piano di eq:

$$\sigma: 3x - y + z = 0$$

e che passa per il punto $(3, -1, -2)$.

$\underline{v}_r = (6, -2, 5)$ $\underline{v}_\sigma = (3, -1, 1)$

il vettore direz di s deve essere $\perp$ $\underline{v}_r$ ($\perp$ tra rette) e $\perp$ $\underline{v}_\sigma$ (// piano-retta)

$$\Rightarrow_{(*)} \underline{v}_s = \underline{v}_r \wedge \underline{v}_\sigma = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 6 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}(-2+5) + \underline{j}(15-6) + \underline{k}(-6+6)$$

Retta s:

$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + 9t \\ z = -2 \end{cases}$$

(*) oppure: $\begin{cases} \underline{v}_s \cdot \underline{v}_r = 0 \\ \underline{v}_s \cdot \underline{v}_\sigma = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{v}_s = (a, b, c)$

trovo a, b, c a meno di un coeff. di proporz.

$(a, b, c) = k(3, 9, 0) \Longleftarrow$

Conti espliciti: $\begin{cases} 6a - 2b + 5c = 0 \\ 3a - b + c = 0 \end{cases}$ sottraggo 2 volte la seconda eq. dalla prima:

$\Rightarrow \begin{cases} 3c = 0 \\ 3a - b + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3a \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow (a, b, c) = (h, 3h, 0) = h(1, 3, 0)$