SUCCESSIONI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

Successione : funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$:

$$n \longmapsto a_n$$

Cioè anche : $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
$= \{a_n\}$

Esempi:

$\{n^2\} = \{0, 1, 2^2=4, 3^2=9, \dots, n^2, \dots\}$

$\{(-1)^n\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$: 1 e -1 a segni alterni

$\{3^{1/n+1}\} = \{3^1 = 3, \ 3^{1/2} = \sqrt{3}, \ 3^{1/3} = \sqrt[3]{3}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{di posto } n}}{3^{1/n+1}}, \dots\}$

$\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} = \left\{\frac{-1}{1} = -1, \frac{0}{2} = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \dots \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}, \dots\right\}$

Graficamente (ATTENZIONE: DOMINIO $\mathbb{N}$)

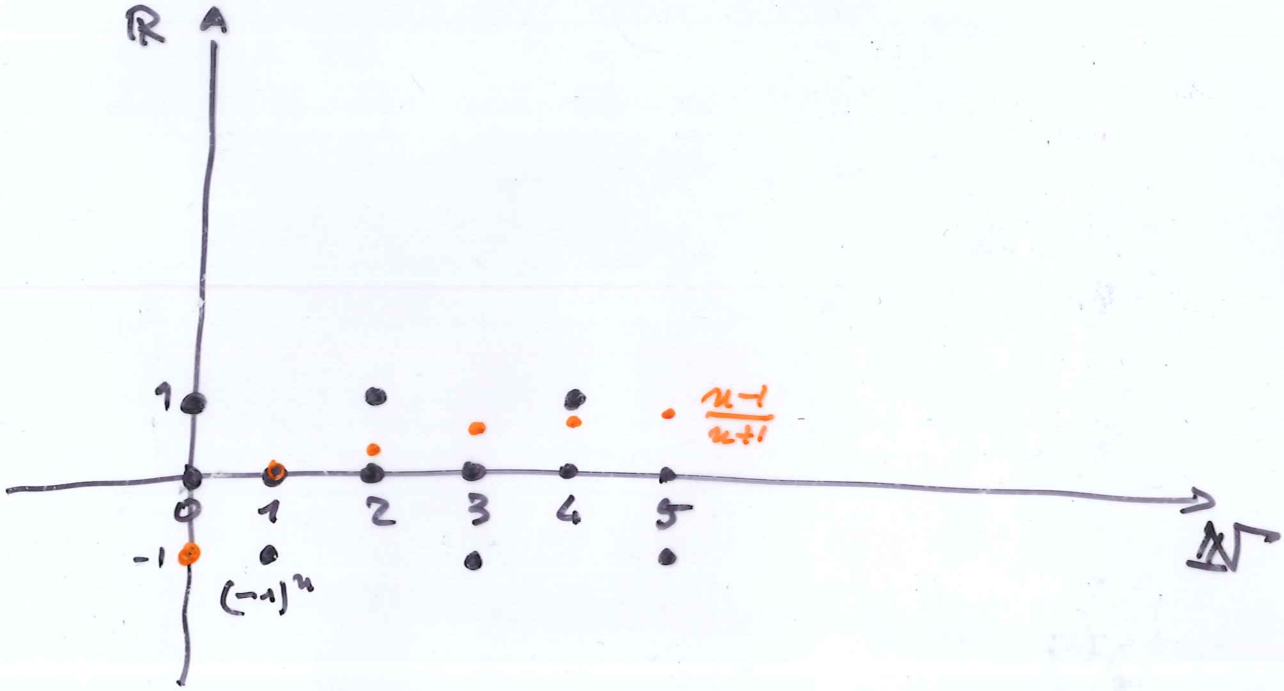
La successione $\{a_n\}$ è detta

- SUPERIORMENTE LIMITATA se l'ins. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è sup. limitato cioè $\exists L \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \leq L$
- INFERIORMENTE LIMITATA se l'ins. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è inf. lim. cioè $\exists \ell \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $\ell \leq a_n$
- LIMITATA se inf e sup. limitata

VEDI ESEMPI PRECEDENTI

$3^0 < 3^{1/n+1} < 3^1 \Rightarrow$ succ. $\{3^{1/n+1}\}$ limitata

Grafico di una successione



Negli esempi precedenti:

$\{n^2\}$ è inferiormente ma non superiormente limitata

$\{(-1)^n\}$ è limitata: $\operatorname{Inf} = \min = -1$
$\operatorname{Sup} = \max = 1$

$\{3^{1/n+1}\}$ è limitata: $\operatorname{Sup} = \max = 3$
Inf ? si vedrà che è 1 (e comunque non è un minimo)

$\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} = \left\{1 - \frac{2}{n+1}\right\}$ è limitata:

$\operatorname{Inf} = \min = -1$
Sup ?... è plausibile che sia 1 ma non è MAX.

Successioni convergenti

$\boxed{\{a_n\} \to \ell}$ la successione $\{a_n\}$ CONVERGE al numero reale ℓ se:

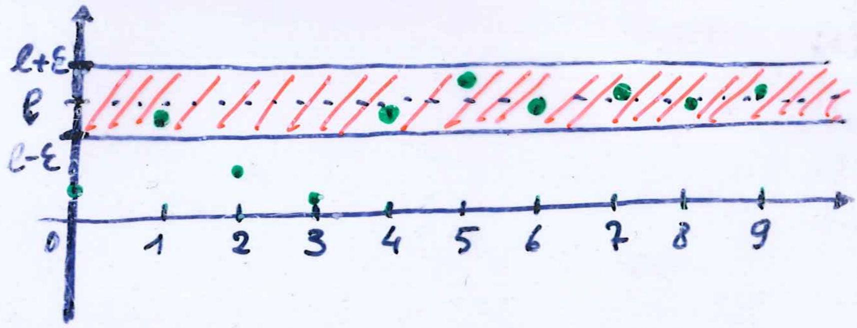
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \text{t.c. } \forall n \geq k : \ |a_n - \ell| < \varepsilon$$

cioè $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

Il limite se esiste è UNICO

vedi S2.1-2

Graficamente:



Es. $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} \to 1$ perché

vedi S2.3

$\varepsilon = 1/10$

Successioni divergenti

$\boxed{\{a_n\} \to +\infty}$ la successione DIVERGE A $+\infty$ se:
$\forall M > 0$, reale, $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$
$a_n > M \Rightarrow$ SUCC. NON SUPER. LIMITATA

$\boxed{\{a_n\} \to -\infty}$ la successione DIVERGE A $-\infty$ se:
$\forall M > 0$ reale $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$
$a_n < -M \Rightarrow$ SUCC. NON INF. LIM.

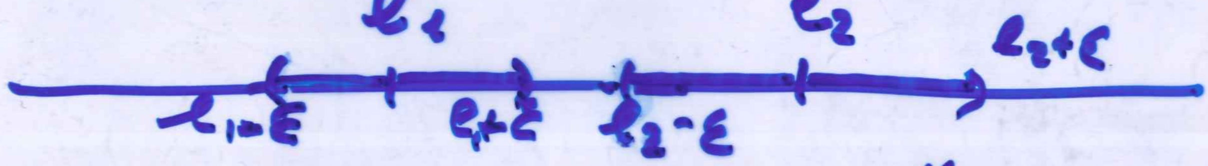
Successioni irregolari Es. $\{(-1)^n\}$, $\{(-2)^n\}$ vedi S2.4-5

Unicità del limite di succ.

$\{a_n\}$ convergente a due limiti l_1, l_2.

Possono essere diversi?

Se lo fossero (ad es. $l_1 < l_2$)



i punti della succ. si "addenserebbero" tanto intorno a l_1 che intorno a l_2 (?!?!). Mostro che non può succedere.

Fisso $\varepsilon = \dfrac{l_2-l_1}{3}$ (o comunque $< \dfrac{l_2-l_1}{2}$)

Per def di convergenza a l_1 (o l_2)

- $\exists k_1 \mid \forall n \geq k_1$ risulta $|l_1 - a_n| < \dfrac{l_2-l_1}{3}$
- $\exists k_2 \mid \forall n \geq k_2$ " $|l_2 - a_n| < \dfrac{l_2-l_1}{3}$

Sia $k = \text{MAX}(k_1, k_2)$ (così valgono entrambe le disug.)

$\forall n \geq k$ si ha

- $l_1 - \frac{l_2 - l_1}{3} < a_n < l_1 + \frac{l_2 - l_1}{3}$
- $l_2 - \frac{l_2 - l_1}{3} < a_n < l_2 + \frac{l_2 - l_1}{3}$

$$\frac{4l_1 - l_2}{3} < a_n < \underline{\underline{\frac{2l_1 + l_2}{3}}} \quad (2)$$

$$\underline{\underline{\frac{2l_2 + l_1}{3}}} < a_n < \frac{4l_2 - l_1}{3} \quad (1)$$

Guardare nell'ordine

Si deduce

$(*)$ $$\frac{2l_2 + l_1}{3} < a_n < \frac{2l_1 + l_2}{3}$$

ma l_2 è $> l_1 \Rightarrow$

$$2l_2 + l_1 > 2l_1 + l_2$$

il che è in contraddizione con $(*)$. ASSORDO!

$\Rightarrow$ l_1 non può essere $\neq l_2$

c.v.d.

$\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} \to 1$: perché?

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 \ldots$

in particolare vado a testare il caso $\varepsilon = \frac{1}{10^m}$ $(m \in \mathbb{N})$ (DENSITÀ!)

cerco $k \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \frac{1}{10^m}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2}{n+1} < \frac{1}{10^m}$$

sono tutti num ≥ 0

$$\Updownarrow$$

$$2 \cdot 10^m < n+1$$

$$\Updownarrow$$

$$n > 2 \cdot 10^m - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$n \geq 2 \cdot 10^m$$

cioè

$$k = 2 \cdot 10^m$$

è il più piccolo indice n a partire dal quale $|a_n - 1| < 1/10^m$

$\{(-1)^n\}$ si addensa intorno a $+1$ e a -1

- Supponiamo che converga a $+1$:

$\forall \varepsilon: |1-(-1)^n| < \varepsilon$ se $n \geq k$ opportuno

se n pari ci riesco poiché $1-1=0<\varepsilon$
se n dispari: $1-(-1) = 1+1 = 2 \underset{??}{<} \varepsilon$

Non va bene!

- Supponiamo che converga a -1:

$\forall \varepsilon: |-1-(-1)^n| < \varepsilon$ se $n \geq k$ opportuno

$|1+(-1)^n| < \varepsilon$

se n è dispari OK: $1-1=0<\varepsilon$
" " pari NO: $1+1=2 \underset{??}{<} \varepsilon$

Potrebbe divergere? NO poiché una succ. divergente, se diverge a $+\infty$ non è sup. limitata, se diverge a $-\infty$ non è inf. limitata mentre

$\{(-1)^n\}$ è limitata:

$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \quad \Rightarrow$ È IRREGOL.

S2.5

È irregolare anche

$$\{(-2)^n\} = \{(-1)^n \cdot (2^n)\}$$

$\{2^n\}$ diverge a $+\infty$

ma $(-1)^n(2^n)$ ha segno che cambia al variare di n da pari a dispari cioè da ogni termine al successivo ... non può divergere a $+\infty$ né a $-\infty$.

Non è limitata (né inf. né sup.) $\Rightarrow$

IRREG.

Vedi S3.1

Successioni monotóne

$\{a_n\}$ monotona $\boxed{\text{crescente}}$ (non decrescente) se $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq a_{n+1}$

" strettamente crescente ..... $a_n < a_{n+1}$

" $\boxed{\text{decrescente}}$ (non crescente) se $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq a_{n+1}$

" Strett. decres " " : $a_n > a_{n+1}$

cioè $\exists k \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$ succede che...

TEOR sul carattere delle succ. monotone

Non sono mai irregolari:

se $\{a_n\}$ è "definitivamente crescente" (non decrescente) $\{a_n\} \to \operatorname{Sup} a_n$

se $\{a_n\}$ è "definitivamente decrescente" (non crescente) $\{a_n\} \to \operatorname{Inf} a_n$

ove $\operatorname{Sup} a_n = +\infty$ se $\{a_n\}$ non è sup limitata e
$\operatorname{Inf} a_n = -\infty$ inf.

ESEMPIO. Per quali $q \in \mathbb{R}$ è monotona la succ. $\{a_n\} = \{q^n\}$?

Se $q > 1$: $q^{n+1} > q^n$ monotona CRESCENTE NON SUP. LIMITATA

Se $q = 1$: $\{1^n\}$ successione costante (LIMITE : 1)

Se $0 < q < 1$: $0 < q^{n+1} < q^n$ monotona DECRESCENTE INFERIORMENTE LIMITATA

Se $q = 0$: $\{0^n, n \geq 1\}$ successione costante (LIMITE 0)

Se $-1 < q < 0$: SUCCESSIONE A SEGNI ALTERNI ma $|q^n| = |(-q)^n|$ $\Rightarrow$ converge a 0

Se $q = -1$ $\{(-1)^n\}$ successione IRREGOLARE

Se $q < -1$: successione IRREGOLARE **ILLIMITATA**

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Se } q > 1 : & \lim\limits_{n \to \infty} q^n = +\infty \\ \text{Se } q = 1 : & \lim\limits_{n \to \infty} q^n = 1 \\ \text{Se } |q| < 1 : & \lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0 \end{array}}$$

Ricordare

si legge: limite PER n che tende a $+\infty$ di q^n è 0

$\{a_n\}$ crescente $\iff$ S3.1

● $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1}$.

È vero che $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ se $n < m$ allora $a_n < a_m$?

SI

$m - n = k > 0$

Per ●

$a_n < a_{n+1}$

$a_{n+1} < a_{n+2}$

$\vdots$

$a_{n+k-1} < a_{n+k} = a_m \implies$

Per le succ. le 2 def sono equivalenti

TEOREMI RELATIVI ALL'ORDINAMENTO

1) PERMANENZA DEL SEGNO Vedi S4.1

$\{a_n\} \to a$ con $a > 0$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ si ha $a_n > 0$

si rilegge anche:

$\{a_n\} \to a$ con $a_n \leq 0$ (almeno da un certo indice in poi) $\Rightarrow a \leq 0$ Vedi S4.2

Valgono anche le versioni con il cambio di verso nelle disuguaglianze.

2) (CONSEGUENZA che si prova dopo "OPERAZIONI SUI LIMITI")

Se $\left.\begin{array}{l}\{a_n\} \to a \\ \{b_n\} \to b\end{array}\right]$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ (o almeno $\forall n \geq k$ con $k \in \mathbb{N}$ fissato) $a_n \leq b_n$

Allora $a \leq b$.

3) CONFRONTO Vedi S4.3

$\left.\begin{array}{l}\{a_n\} \to \ell \\ \{c_n\} \to \ell\end{array}\right]$ e $\forall n \ldots : a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow \{b_n\} \to \ell$

4) LIMITATEZZA DELLE SUCCESSIONI CONVERGENTI

vedi S4.4

OPERAZIONI SUI LIMITI FINITI

Siano $\{a_n\} \to a$, $\{b_n\} \to b$ successioni convergenti (a, b sono quindi FINITI). Allora

- $\{a_n + b_n\} \to a+b$
- $\{-b_n\} \to -b$ e quindi $\{a_n - b_n\} \to a-b$
- $\{a_n b_n\} \to ab$ PER VEDERLO SERVE 4
- $\left\{\frac{1}{b_n}\right\} \to \frac{1}{b}$ purché $\forall n$ sia $b_n \neq 0$ e sia $b \neq 0$: SERVE 1
- e quindi $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to \frac{a}{b}$ " " "
- $\{a_n^{b_n}\} \to \{a^b\}$ purché $\forall n$ sia $a_n > 0$ e sia $a > 0$.

S4.1

PERMANENZA del SEGNO

$\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$

Significa (def limite)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$

risulti

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \qquad (*)$$

Scelgo $\varepsilon = a$. La $(*)$ dice:

$\boxed{0 = a - a < a_n} < a + a$ pur di

prendere $n \geq k$ opportuno

c.v.d.

Se invece

$\lim_{n\to+\infty} a_n = a < 0$

basta prendere $\varepsilon = -a$

$$a - (-a) < a_n < a - a = 0$$

$\Rightarrow \boxed{a_n < 0}$ pur di prendere $n \geq k$ opportuno.

c.v.d.

Il teor della perm. del segno si sfrutta nella sua forma contronominale:

Se $\{a_n\}$ converge e i termini (suoi) sono almeno definitivamente ≥ 0 allora il limite è ≥ 0; se sono definitivam. ≤ 0 allora il limite è ≤ 0.

Infatti da:

$$\{a_n\} \to a > 0 \quad \Rightarrow \exists k \,/\, \forall n \geq k : a_n > 0$$

x contronominale:

$$\text{se } a_n \leq 0 \ \forall n \Rightarrow \quad a \leq 0 . \text{ Ecc. se } a_n \geq 0 \ldots\ldots$$

ATTENZIONE:

$$a_n = \frac{1}{n} > 0, \text{ ma } \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Cioè, anche se tutti i termini della successione sono STRETTAMENTE > 0, il limite può essere $= 0$ e non > 0.

Hp $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \ \wedge \lim_{n\to+\infty} c_n = \ell$

e $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ a_n \le b_n \le c_n$

significano:

- def. conv. di $\{a_n\} \to \ell$:

$\forall \varepsilon \ \exists k_1 \mid \forall n \geq k_1 \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

- def. conv. di $\{c_n\} \to \ell$:

$\forall \varepsilon \ \exists k_2 \mid \forall n \geq k_2 \quad \ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon$

Sia

$k = MAX(k_1, k_2)$; $\forall n \geq k$ si ha

$\ell - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < \ell + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon, \exists k$ t. c.

$\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon$

cioè $\{b_n\} \to \ell$. c.v.d.

limitatezza delle succ. conv.

Hp. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = a}$. Per def. di converg.

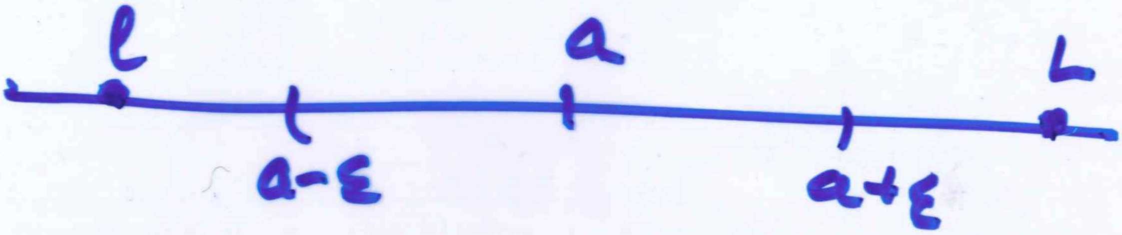
se fisso $\varepsilon>0$, $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$$

sono rimasti fuori $a_1, \dots, a_{k-1}$

Sia $l = \min(a_1, \dots, a_{k-1})$

$L = MAX(a_1, \dots, a_{k-1})$



l e L possono stare o in $(-\infty, a-\varepsilon)$ o in $(a+\varepsilon, +\infty)$

$$\min(l, L, a-\varepsilon) = \min(l, a-\varepsilon) = A$$

$$\operatorname{Max}(L, a+\varepsilon) = B$$

$$\Rightarrow \boxed{A \leq a_n \leq B \quad \text{Tesi}}$$

c.v.d.

S.5.1

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-2n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2n}{n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}\right) = 0 - 0 = 0$$

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\right)^2 - \lim_{n\to+\infty} 2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}.$$

$$\lim \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{3n^2}{1-2n^2}\right) =$$

$$= \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \lim \frac{3}{\frac{1}{n^2} - \frac{2n^2}{n^2}} =$$

$$= (1 - 0) \cdot \lim \frac{3}{-2 + \frac{1}{n^2}} =$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{-2 + \lim \frac{1}{n^2}} = 1 \cdot \frac{3}{-2+0} = \frac{-3}{2}.$$

55.2

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{5u^3 - 6u^2 + 1}{-u^3 + u - 3} =$$

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{5\cancel{u^3}\left(1 - \frac{6}{5u} + \frac{1}{5u^3}\right)}{-\cancel{u^3}\left(1 - \frac{1}{u^2} + \frac{3}{u^3}\right)} =$$

$$= -5 \lim_{u \to +\infty} \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0 + 0}$$

$$= 1$$

ES $\left\{ \frac{1-2n}{n^2} \right\}$ Vedi S5.1

$\left\{ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{3n^2}{1-2n^2} \right\}$ Vedi S5.1

$$\left\{ \frac{1-1/n}{\frac{3n^2}{1-2n^2}} \right\}$$

$$\left\{ 2^{\frac{1-2n}{n^2}} \right\}$$

$$\left\{ \left(\frac{2n-1}{n}\right)^{\frac{3n^2}{1-2n^2}} \right\}$$

Illustrata a pag S5.2

Una regola generale

$$\left\{ \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_h n^h + b_{h-1} n^{h-1} + \dots + b_1 n + b_0} \right\} \to ?$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k + \dots + a_0}{b_h n^h + \dots + b_0} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k \left(1 + a_{k-1}\frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^k}\right)}{b_h n^h \left(1 + b_{h-1}\frac{1}{n} + \dots b_0 \frac{1}{n^h}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k}{b_h n^h} = \begin{cases} \boxed{k>h} : +\infty \text{ o } -\infty \text{ (segno di } \frac{a_k}{b_h}) \\ \boxed{k=h} : a_k/b_k \\ \boxed{k<h} : 0 \end{cases}$$