ES $\left\{ \frac{1-2n}{n^2} \right\}$ Vedi S5.1

$\left\{ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{3n^2}{1-2n^2} \right\}$ Vedi S5.1

$\left\{ \frac{1-1/n}{\frac{3n^2}{1-2n^2}} \right\}$

$\left\{ 2^{\frac{1-2n}{n^2}} \right\}$

$\left\{ \left(\frac{2n-1}{n} \right)^{\frac{3n^2}{1-2n^2}} \right\}$

Illustrata a pag S5.2

Una regola generale

$$\left\{ \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_h n^h + b_{h-1} n^{h-1} + \dots + b_1 n + b_0} \right\} \longrightarrow ?$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_k n^k + \dots + a_0}{b_h n^h + \dots + b_0} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{a_k n^k \overbrace{\left(1 + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^k}\right)}^{\to 1}}{b_h n^h \left(1 + b_{h-1} \frac{1}{n} + \dots b_0 \frac{1}{n^h}\right)} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{a_k n^k}{b_h n^h} = \begin{cases} \boxed{k > h} : +\infty \text{ o } -\infty \text{ (segno di } \frac{a_k}{b_h}\text{)} \\ \boxed{k = h} : a_k / b_k \\ \boxed{k < h} : 0 \end{cases}$$

ARITMETICA delle SUCC. DIVERGENTI e Forme di indecisione.

Se una o ambedue le successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ DIVERGONO cosa succede?

I) SOMME - DIFFERENZE

$\{a_n\} \longrightarrow a \qquad \{b_n\} \longrightarrow \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \{a_n \pm b_n\} \longrightarrow \pm\infty$

$\{a_n\} \longrightarrow +\infty \qquad \{b_n\} \longrightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad \{a_n + b_n\} \longrightarrow +\infty$

$\{a_n\} \longrightarrow -\infty \qquad \{b_n\} \longrightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad \{a_n + b_n\} \longrightarrow -\infty$

E $\{a_n - b_n\}$? $\quad [+\infty - \infty]$ $[-\infty - (-\infty)]$? FORMA DI INDECISIONE

ES. $\{n - n^2\} \longrightarrow -\infty$

Vedi S6.1

Bisogna ragionare ogni volta!

$\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\} \longrightarrow 0$

$\{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+4}\} \longrightarrow 1$

II) PRODOTTI

$\{a_n\} \longrightarrow a>0 \qquad \{b_n\} \longrightarrow \pm\infty \qquad \{a_n b_n\} \longrightarrow \pm\infty$

$a<0 \qquad \pm\infty \qquad \mp\infty$

$\{a_n\} \rightarrow +\infty \qquad \{b_n\} \longrightarrow +\infty \qquad \{a_n b_n\} \longrightarrow +\infty$

ECC. : ARITMETICA DEI SEGNI

E $\{a_n\} \longrightarrow 0$, $\{b_n\} \longrightarrow \pm\infty$? $\quad [0 \cdot (+\infty)]$? $[0 \cdot (-\infty)]$? F.I.

- $\lim_{n\to\infty} (n-n^2) = \lim_{n\to\infty} -n^2\left(1-\frac{1}{n}\right) = ?$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}(-n^2)\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$-\infty \cdot 1 = -\infty$$

- $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=0$$

- $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+4}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n)-(n^2+4)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+4}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-4}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}+\sqrt{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}}=$$

$\sqrt{n^2}\sqrt{1+2/n}=|n|\sqrt{1+2/n}=n\sqrt{1+2/n}$ ecc. per l'altra radice

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n-2)}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)}=$$

$\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)\right\}^{1/2}\to 1^{1/2}$ ecc. per l'altra rad.

$$=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2/n}+\sqrt{1+4/n^2}}=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$$

ES

vedi S7.1

$\left\{ \frac{1}{n^2+1} \cdot (2n^2-1) \right\} \to 2$

$\left\{ (n^{-3}) \cdot (2n^2-1) \right\} \to 0$

$\left\{ \frac{1}{n^2+1} \cdot (n^3) \right\} \to +\infty$

Significa che $\{b_n\} \to 0$ e i b_n sono tutti (o almeno da un certo n in poi) POSITIVI. In generale $\{b_n\} \to b^+$ se $\forall \varepsilon > 0$ esiste k t.c. se $n \geq k$ $0 < b_n - b < \varepsilon$.
PERCHÉ DEVO PRECISARE che $\{b_n\}$ tende a zero DA DESTRA? Vedi S7.2

a seconda del segno di a

III) RAPPORTI

$\{a_n\} \to a \neq 0 \quad \{b_n\} \to 0+ \quad \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \to \boxed{\pm}\infty$

Analogamente se $\{b_n\} \to 0^-$ o se $\{a_n\}$ diverge vedi ad es S7.3A

$\{a_n\} \to a$ finito $\{b_n\} \to \pm\infty \quad \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \to 0$

Invece $\{a_n\} \to 0 \quad \{b_n\} \to 0$? $\left[\frac{0}{0}\right]$ F.I.

$\{a_n\} \to +\infty \quad \{b_n\} \to +\infty$? $\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$ F.I.

ES. PRECEDENTI

FORME DI INDECISIONE ARITMETICHE:

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

ESERCIZIO

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^{3/2} - n^{-7/2} + n^{-1} + 1}{n^{-5/2} + n^2 + 5}$$

vedi S7.3 B

571

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n^2+1}}_{\downarrow\,0}\cdot\underbrace{(2n^2-1)}_{\downarrow\,+\infty}\right)=\lim\frac{2n^2\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{n^{-3}}_{\downarrow\,0}\cdot\underbrace{(2n^2-1)}_{\downarrow\,+\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}=0-0=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{n^2+1}}_{\downarrow\,0}\cdot\underbrace{n^3}_{\downarrow\,+\infty}=\lim\frac{\cancel{n^3}\,n'}{\cancel{n^2}\left(1+1/n^2\right)}=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n^2+1}\cdot n^3=-\infty$$

Dunque: $0\cdot\infty$ è una forma di indecisione

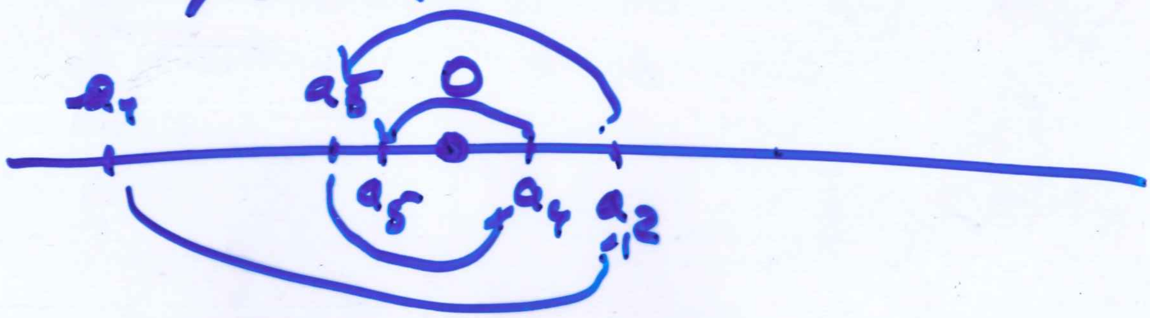
$\{a_n\}$ con $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$? Poiché:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \dfrac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \dfrac{|(-1)^n|}{n} = \dfrac{1}{n} < \varepsilon,$

purché $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, posso rispondere

Sì, $\{a_n\} \to 0$



ma $\lim a_n \neq 0^+$

$\neq 0^-$

Considero $\{b_n\}$ con $b_n = 1 \ \forall n$.
La successione

$\left\{ \dfrac{b_n}{a_n} \right\} = \left\{ \dfrac{1}{\frac{(-1)^n}{n}} \right\} = \left\{ (-1)^n \cdot n \right\}$ è irregolare!

Se la succ. a denom. $\to 0$ ma non da un verso definito $(+, -)$ il quoz. può essere irregolare

A) $\{a_n\} \to +\infty \qquad a_n = n^2$

$\{b_n\} \to 0^- \qquad b_n = \dfrac{-1}{n}$

$\{a_n/b_n\}$ non presenta F.I. Infatti:

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{n}{-\frac{1}{n^2}}\right\} = \left\{-n^3\right\} \longrightarrow -\infty$$

B

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^{3/2} - n^{-7/2} + n^{-1} + 1}{n^{-5/2} + n^2 + 5} =$$

metto in ordine decresc. le potenze

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{3/2} + \underbrace{\boxed{1 + n^{-1} - n^{-7/2}}}_{\to 1}}{n^2 + \underbrace{\boxed{5 + n^{-5/2}}}_{\to 5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{3/2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 2n^{-1/2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

ATTENZIONE: perché un rapporto converga non è necessario che convergano (o che siano regolari) la succ. NUMERATORE e la SUCC. DENOMINATORE.

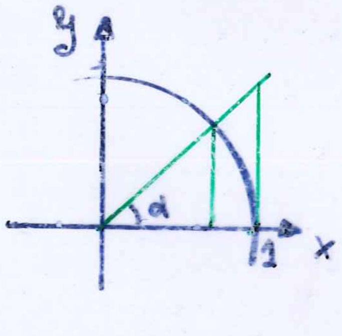
Es. $\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\}$ ha il numeratore irregolare ma $|\operatorname{sen} n| \leq 1$

Vale il criterio: $\{a_n\}$ limitata e $\{b_n\} \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \{a_n b_n\} \to 0$ Vedi S8.1

Dunque $\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\} \to$

Invece $\left\{\operatorname{sen} \frac{1}{n}\right\}$?

e $\left\{n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right\}$? $\qquad \left\{\frac{\operatorname{sen} 1/n}{1/n}\right\} \to 1$



se $\{a_n\} \to 0$: $\left\{\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right\} \to 1$ LIMITE NOTEVOLE

$\{\operatorname{sen} n\}$? irregolare per $n \to \infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0$$

poiché $|\operatorname{sen} n| \leq 1$
$\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$

Infatti vale il criterio

$\{a_n\}$ limitata, $\{b_n\} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{a_n b_n\} \to 0$

Dim. TS $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \,|\, \forall n \geq k \text{ si abbia } |a_n b_n - 0| < \varepsilon}$

Poiché $\{a_n\}$ è limitata $\exists L$ t.c. $|a_n| \leq L$

$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq L\, |b_n|$

$\{b_n\} \to 0$ e quindi fissato $\frac{\varepsilon}{L}$, $\exists k$ t.c. $\forall n \geq k$ sia $|b_n| < \frac{\varepsilon}{L}$

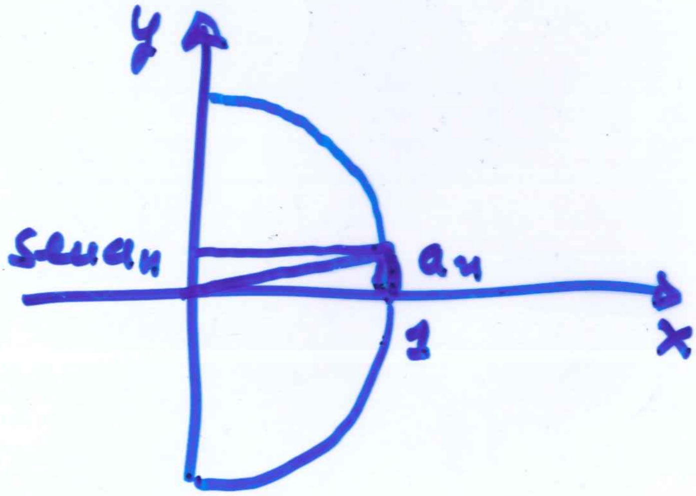
quindi $\forall n \geq k$ risulta:

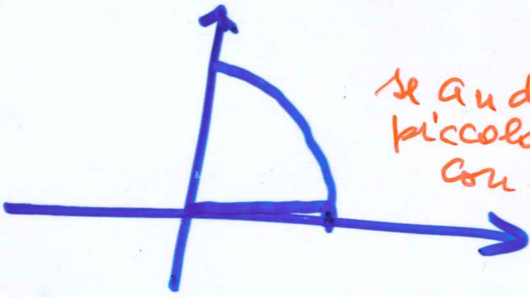
$|a_n b_n| \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$

c.v.d.

$\left\{ \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right\}$ per $n \to \infty$ che cosa fa? In generale:

$\{ \operatorname{sen} a_n \}$ con $\{a_n\} \to 0$?





se a_n diventa piccolo si confonde con sen a_n

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \{a_n\} \to 0}} \operatorname{sen} a_n = 0$$

$$\cos a_n = \sqrt{1 - \underbrace{\operatorname{sen}^2 a_n}_{\downarrow \; 0}}$$ identità fondam.

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \{a_n\} \to 0}} \cos a_n = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \{a_n\}\to 0}} \tan a_n = \lim_{\cdots} \frac{\operatorname{sen} a_n}{\cos a_n} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \{a_n\}\to 0}} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1$$

$$\operatorname{sen} a_n \le a_n \le \tan a_n = \frac{\operatorname{sen} a_n}{\cos a_n}$$

$a_n > 0$ piccolo $\Downarrow$ $\operatorname{sen} a_n > 0$

$$1 = \frac{\operatorname{sen} a_n}{\operatorname{sen} a_n} \le \frac{a_n}{\operatorname{sen} a_n} \le \frac{1}{\cos a_n}$$

tutti sono $>$; $\frac{1}{(\ )}$ in $(0,+\infty)$ è decresc.

Quindi

$$1 \ge \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} \ge \cos a_n$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad 1$$

per il teor del confronto $\lim \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1$

- $\lim_{n\to\infty} \underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{n} \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\operatorname{sen}\frac{2}{n}} = [\infty\cdot 0]$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} 2/n}{1/n} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} 2/n}{2/n}}\cdot 2 = 2$$

limite notevole: $\left\{\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right\} \to 1$
poiché $\{a_n\} = \left\{\frac{2}{n}\right\} \to 0$

- $\lim_{n\to\infty} (n^2-1) \operatorname{sen}\frac{2}{n} = [\infty\cdot 0]$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} 2/n}{\frac{1}{n^2-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} 2/n}{\frac{2}{n}\cdot\left(\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2-1}\right)} =$$

$$= 1\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2(n^2-1)}{n} = +\infty$$

Successioni asintotiche.

Dico che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ <u>sono asintotiche</u> per $n \to \infty$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ e scrivo $a_n \sim b_n$.

Se devo calcolare ad es.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n}$ e si presenta una f. i. $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ e $\{a_n\}$ è una succ. di studio difficile ma è $a_n \sim b_n$ e $\{b_n\}$ è "più facile" posso "sostituire" $\{b_n\}$ ad $\{a_n\}$ nel calcolo del limite perché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n / b_n}{c_n / b_n} =$$

$$= \frac{\lim a_n/b_n}{\lim c_n/b_n} = 1 \cdot \lim \frac{b_n}{c_n}.$$

IDEM PER I PRODOTTI

Sull'ultimo esercizio, ad esempio ho

$$\lim_{n \to \infty} (n^2-1) \operatorname{sen} \frac{2}{n} =$$

$$\lim_{n \to \infty} (n^2-1) \cdot \frac{2}{n} = +\infty$$

l'asintotico dà una approssimazione utile nel calcolo di limiti di rapporti e prodotti, non di somme algebriche

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{sen} 1/n - 1/n}{1/n^3} \; ?$$

non posso sostituire $\operatorname{sen} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ poiché non è vero che la differenza sia $= 0$

Bisogna raffinare l'approssimazione

Per quanto riguarda i logaritmi, tener presente che

$$\log_{a_n} b_n = \frac{\log_c b_n}{\log_c a_n} \qquad (a_n > 0, \neq 1, \ b_n > 0)$$

Conviene riportarsi a questa forma, con $\boxed{c > 1}$.

Allora

$\{a_n\} \to a > 0 \quad \Rightarrow \{\log_c a_n\} \to \log_c a$

$\{a_n\} \to +\infty \quad \Rightarrow \{\log_c a_n\} \to +\infty$

$\{a_n\} \to 0+ \quad \Rightarrow \{\log_c a_n\} \to -\infty$

ES. $\left\{\log_{10} \frac{1}{n}\right\} \to$

$\left\{\log_{10} \frac{n^2+3n}{2n^2-1}\right\} \to$

Per gli esponenziali e/o potenze:

$$a_n^{b_n} = c^{b_n \log_c a_n} \qquad (a_n > 0)$$

Non ci sono forme di indecisione per i logaritmi

Invece per gli esponenziali:

$c^{0\cdot\infty}$ $\left\langle \begin{array}{ll} (c^0)^\infty & : [1^\infty] \\ (c^{+\infty})^0 & : [\infty^0] \\ (c^{-\infty})^0 & : [0^0] \end{array} \right.$

Non ci sono altre forme di indecisione.

59.1

$$\{a_n\} \to 0^+$$

$$\{\log_c a_n\} \ ?$$

$$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} \to +\infty$$

$$\left\{\log_c \frac{1}{a_n}\right\} \to +\infty$$

$$\overset{\|}{\{-\log_c a_n\}} \quad \overset{(\times(-1))}{\Longrightarrow} \{\log_c a_n\} \to -\infty$$

$$\left\{\log_{10} \frac{1}{n}\right\} \to -\infty$$

$$\left\{\log_{10}\left(\frac{n^2+3n}{2n^2-1}\right)\right\} \to \log_{10}\frac{1}{2} = -\log_{10} 2$$

$$a_n^{b_n} = c^{\boxed{b_n \log_c a_n}}$$

$$\log_c a_n^{b_n} = b_n \log_c a_n$$

$$[1^\infty] \quad [\infty^0] \quad [0^0]$$