Per quanto riguarda i logaritmi, tener presente che

$$\log_{a_n} b_n = \frac{\log_c b_n}{\log_c a_n} \qquad (a_n>0, \ne 1,\ b_n>0)$$

Conviene riportarsi a questa forma, con $\boxed{c>1}$.

Allora

$$\{a_n\} \to a>0 \quad \Rightarrow \quad \{\log_c a_n\} \to \log_c a$$

$$\{a_n\} \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \{\log_c a_n\} \to +\infty$$

$$\{a_n\} \to 0+ \quad \Rightarrow \quad \{\log_c a_n\} \to -\infty$$

ES. $\left\{\log_{10} \frac{1}{n}\right\} \to$

$$\left\{\log_{10} \frac{n^2+3n}{2n^2-1}\right\} \to$$

Per gli esponenziali e/o potenze: vedi pag S9.1

$$a_n^{b_n} = c^{b_n \log_c a_n} \qquad (a_n>0)$$

Non ci sono forme di indecisione per i logaritmi
Invece per gli esponenziali:

$$c^{0\cdot\infty} \begin{cases} (c^0)^\infty & : [1^\infty] \\ (c^{+\infty})^0 & : [\infty^0] \\ (c^{-\infty})^0 & : [0^0] \end{cases}$$

Non ci sono altre forme di indecisione.

Si dimostra facilmente che

$$\{a_n\} \to a \quad c \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

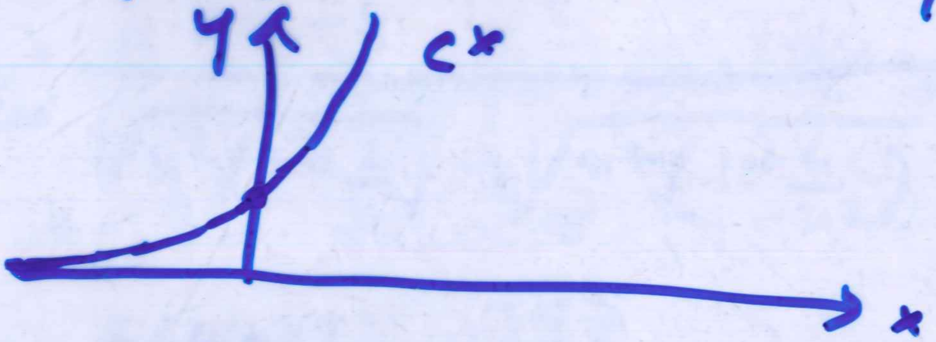
$$\Rightarrow \{c^{a_n}\} \to c^a$$

se $\boxed{c > 1}$

$$\{a_n\} \to +\infty \Rightarrow \{c^{a_n}\} \to +\infty$$

$$\{a_n\} \to -\infty \Rightarrow \{c^{a_n}\} \to 0^+$$

cioè si verifica analiticamente che il grafico di c^x è proprio



se $\boxed{0 < c < 1}$ la situazione si ribalta

Qualche ESEMPIO

$$\left\{\left(2^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right\} \to 2^{+\infty} = +\infty$$

$$\left\{\left(2^{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}\right\} \to 2^0 = 1$$

$$\left\{\left(2^{2n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\} \to 2^2 = 4$$

$$\left\{\left(2^{n^2}\right)^{-1/n}\right\} \to 2^{-\infty} = 0$$

Es. di ∞^0

Per avere esempi di 0^0 sostituire alla base 2 la base $\frac{1}{2}$.

ALTRI ESEMPI DOPO IL CONFRONTO DI ∞

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \to ?$$

ESEMPIO CHIAVE

- Successione crescente ....

  Invece $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ è decrescente ....
- Successione limitata (sup. e inf.)

Quindi convergenti. A un numero (che si dimostra irrazionale trascendente) che chiamo

e (NUMERO DI NEPERO)

Prime cifre decimali:

2.718281824 .....

Successione crescente molto lentamente

$n=1$: 2

$n=2$: 2.25

$n=3$: $64/27 = 2.\overline{370}$

$n=4$: $625/256 = 2.44140625$

$\vdots$

$n=10$: $\left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 2.59374246$

Fare l'esercizio di tabulazione sul testo.

E la successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ a cosa tende? **a e!**

E " $\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right\}$? $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

ancora a e!

Allora se $\boxed{\{a_n\} \longrightarrow +\infty}$, da

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n\rfloor} \leq \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)^{\lfloor a_n\rfloor+1}$$

ove $\lfloor x\rfloor$ = parte intera di x, cioè il più grande intero $\leq x$

Vedi grafico a pag. S11.1

APPLICANDO IL CRITERIO DEL CONFRONTO

si ricava

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e}$$

Lo stesso se $\{a_n\} \to -\infty$

ESERCIZI Calcolare il $\lim_{n\to\infty} a_n$ ove a_n è:

A. $\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n}$ Svolgimento a pag S11.2

B. $\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n^2+n}$ "

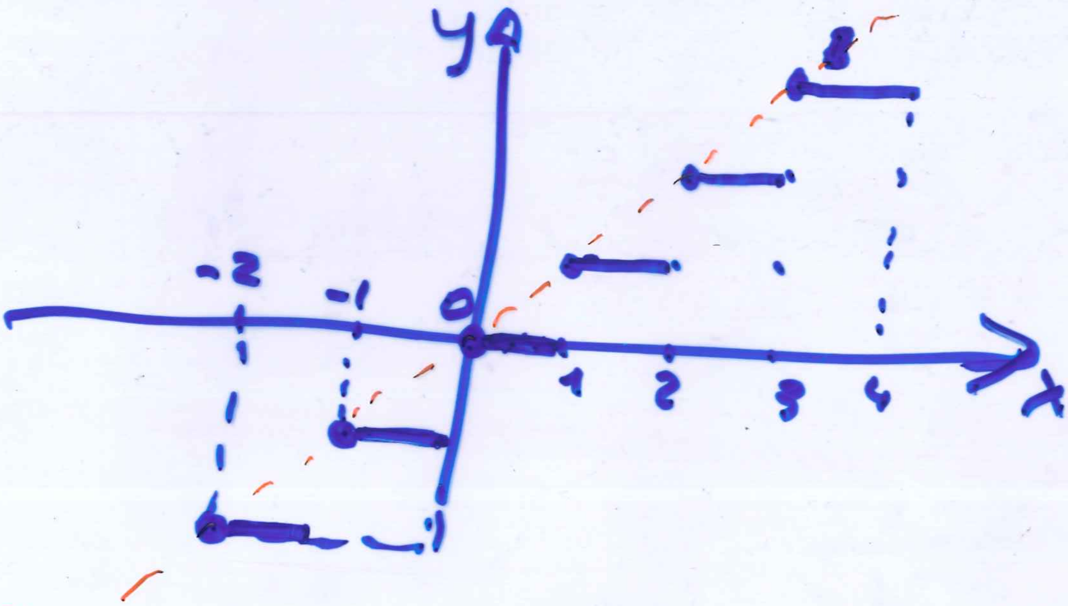
C. $\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n}$ Svolgimento a pag S11.3

D. $\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n^2}$ "

E. $\left(\frac{n^3-5n+1}{n^3+n^2-1}\right)^{n^3}$ "

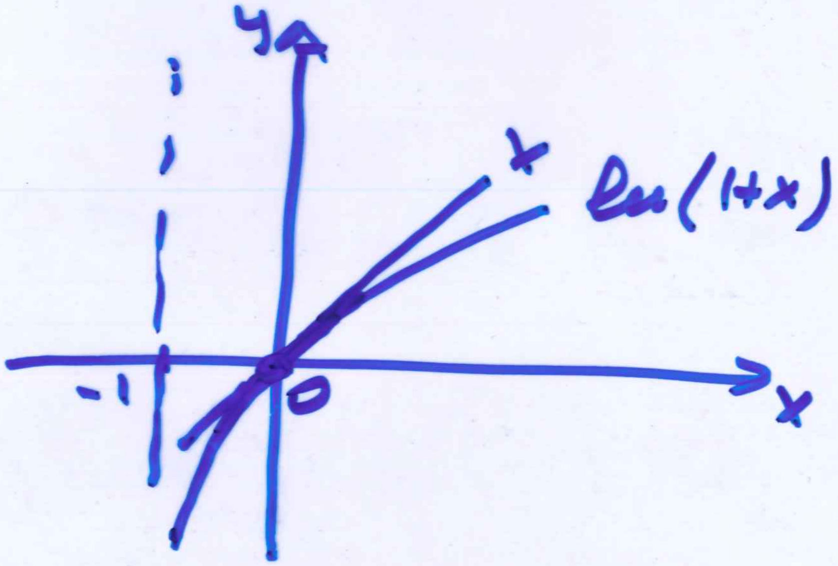
Parte intera di $\lfloor x \rfloor$

$\lfloor x \rfloor$ = il più grande intero $\leq x$



Interpretazione del fatto (che si vede a inizio pag S1(2)) che:

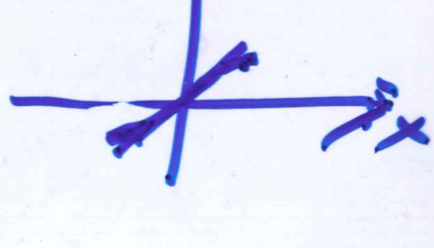
$$\lim_{\{b_n\} \to 0} \frac{\ln(1+b_n)}{b_n} = 1$$



ln(1+x) vicino a x = 0 si comporta come x

così come:

$$\lim_{\{b_n\} \to 0} \frac{\operatorname{sen} b_n}{b_n} = 1 \quad \Rightarrow$$



A.

$$\boxed{\lim_{\substack{n\to\infty \\ a_n\to\infty}} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot n} =$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right)}_{e}^{\underbrace{\boxed{\lim \frac{2n}{n+1}}}_{2}} = e^{2}$$

B.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n^2+n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{\frac{1-n^2}{3}}\right)^{\frac{1-n^2}{3}}}}_{\to e}{}^{\cdot \underbrace{\boxed{\frac{3}{1-n^2}\cdot(n^2+n)}}_{\to -3}} = e^{-3}$$

C.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-1}{-3}}\right)^{\frac{n^2-1}{-3}}}_{\to e}\cdot\underbrace{\frac{-3}{n^2-1}\cdot n}_{\to 0}=e^{0}=$$

$$=1$$

D.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n^2}=e^{\lim\frac{2n^2}{n+1}}=$$

$$=e^{+\infty}=+\infty$$

E.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-5n+1}{n^3+n^2-1}\right)^{n^3}=$$ la base $\to 1$ $\Rightarrow [1^\infty]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-n^2-5n+2}{n^3+n^2-1}\right)^{n^3}=$$

numeratore - denomin.

$$=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{-n^2-5n+2}{n^3+n^2-1}\cdot n^3}=$$

$$=e^{\lim\left(-\frac{n^5}{n^3}\right)}=e^{\lim(-n^2)}=e^{-\infty}=0$$

Se $\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

- A) $\lim_{n \to \infty} n \cdot \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) = [\infty \cdot 0]$

eccetera....

vedi pag S12.1

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

B) $\lim_{n \to \infty} n \log_{10}\left(1+\frac{1}{2n}\right) =$ "

C) $\lim_{n \to \infty} n \log_e\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right) =$ vedi pag S12.2

D) $\lim_{n \to \infty} n^2 \log_e\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right) =$ "

MA ATTENZIONE AI FALSI ANALOGHI!

E) $\lim_{n \to \infty} n \log_{10}\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right) = ?$ "

- $\lim_{n \to \infty} n\underbrace{(e^{1/n} - 1)}_{b_n} = [\infty \cdot 0]$ vedi pag S12.3

b_n

$\Downarrow$

$n = ?$

e in generale: $\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \{a_n\} \to 0^+ \text{ oppure } 0^-}} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$

- $\lim_{n \to \infty} \underbrace{\left[\left(1+1/n\right)^{\sqrt{2}} - 1\right]}_{b_n} n = [0 \cdot \infty] = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}} - 1}{\frac{1}{n}}$

b_n

$\Downarrow$

$\ln(b_n+1) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n}$ ....

(Vedi pag S12.4)

A)

$$\lim_{n\to\infty} n \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) = [\infty \cdot 0] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(\log_2 e \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \log_2 e \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+1/n\right)}{1/n} =$$

$$= \log_2 e \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \log_2 e \cdot \ln e = \log_2 e$$

In generale

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \{b_n\}\to 0}} \frac{\log_c(1+b_n)}{b_n} = \log_c e$$

---

modo alternativo di svolgere questo tipo di limite

B)

$$\lim_{n\to\infty} n \log_{10}\left(1+\frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log_{10}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \log_{10} e^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\log_{10} e$$

C)

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right) = [\infty \cdot 0] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{4}{2n-1}\right) =$$

$\ln(b_n+1) \sim b_n$ se $\{b_n\} \to 0$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{4}{2n-1} = 2$$

D)

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right) = [\infty \cdot 0] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{4}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} 2n =$$

$$= +\infty.$$

E)

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \log_{10}\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right) = +\infty \cdot (-\infty) =$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{1/n}-1\right) = [\infty \cdot 0] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1}{1/n} = 1 \quad \text{LIM NOTEVOLE}$$

$$b_n = e^{1/n} - 1 \Downarrow$$
$$b_n + 1 = e^{1/n} \Downarrow$$
$$\ln(1+b_n) = \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \{b_n\}\to 0}} \frac{b_n}{\ln(1+b_n)} = 1$$

Se la base dell'esponenziale non è e....

$$\lim_{n\to\infty} n\left(2^{1/n}-1\right) = [\infty \cdot 0] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{1/n}-1}{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{(\ln 2)\frac{1}{n}}-1}{\ln 2 \cdot \frac{1}{n}} \cdot \ln 2 =$$

$$= 1 \cdot \ln 2 = \ln 2$$

In generale $\lim_{\substack{n\to\infty \\ \{b_n\}\to 0}} \frac{c^{b_n}-1}{b_n} = \ln c$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}-1\right)\cdot n = [0\cdot\infty] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}-1}{\frac{1}{n}} = \sqrt{2}$$

Più in generale, se $\{b_n\}\to 0$

$$\frac{(1+b_n)^t-1}{b_n} =$$

pongo $(1+b_n)^t = e^{a_n}$
cioè $t\ln(1+b_n)=a_n$

$$= \frac{e^{a_n}-1}{b_n}\cdot\frac{t\ln(1+b_n)}{a_n} =$$

$$= \frac{e^{a_n}-1}{a_n}\cdot t\cdot\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}$$

e dato che $\{b_n\}\to 0$

e $\{a_n\}=\{t\ln(1+b_n)\}\to 0$

si vede che la succ. ha limite

$$1\cdot t\cdot 1 = t$$

(Si sfruttano gli altri due limiti notevoli).

RIASSUNTO sui limiti notevoli

(1) Per ogni successione $\{a_n\}$ che sia divergente (a $+\infty$ o a $-\infty$) risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$

(2) Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta — con verso specificato 0^+ oppure 0^-

$$\lim_{n\to+\infty}(1+b_n)^{1/b_n}=e \qquad \left(b_n=\frac{1}{a_n}\right)$$

(3) Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}=1$$

$\ln=\log_e$

$\ln(1+b_n)\sim b_n$ se $\{b_n\}\to 0$

APPLICO IL LOG in base e alla succes. (2)

(4) Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{b_n}-1}{b_n}=1$$

$e^{b_n}-1\sim b_n$ se $\{b_n\}\to 0$

(5) Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+b_n)^t-1}{b_n}=t \qquad (\forall t\in\mathbb{R})$$

se $\{b_n\}\to 0$: $\forall t\neq 0$ $(1+b_n)^t-1\sim t\,b_n$

Non dipende dai precedenti ma aggiungere il limite:

$\forall$ succ. $\{b_n\}\to 0$: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin b_n}{b_n}=1$

DEF Dico che due succ. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono ASINTOTICHE (per $n\to+\infty$) se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$$

DEFINIZIONE

Una succ. $\{a_n\}$ è "**o piccolo**" di $\{b_n\}$ per $n \to \infty$ se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Se succede, scrivo $a_n = o(b_n)$.

ATTENZIONE. La nozione di $o(\,)$ non si applica solo a successioni che tendono a zero. Ad es. se

$$a_n = n \quad e \quad b_n = n^2$$

posso dire che $a_n = o(b_n)$.
Oppure se $\{a_n\} \to 0$ e $b_n = 1 \ \forall n$ posso dire che $a_n = o(1)$.

Attenzione: dire che due successioni sono asintotiche <u>non</u> <u>significa</u> che la loro differenza tende a zero!
Ad es. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1$ ma

$(n+2) - n = 2 \to 2 \neq 0$. Ciò che posso dire è che $(n+2) - n = o(n)$ poiché $2 = o(n)$. In generale:

Se $\{c_n\} \sim \{b_n\}$, cioè se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{c_n}{b_n} = 1$$

allora $c_n - b_n = o(b_n)$, cioè $c_n = b_n + o(b_n)$.

Infatti $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{c_n - b_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{c_n}{b_n} - 1 \right) = 0.$

Vale ovviamente anche il viceversa.

Allora se $\{b_n\} \to 0$

da $\{\sin b_n\} \sim \{b_n\}$ ricavo

(1) $$\sin b_n = b_n + o(b_n)$$

da $\{\tan b_n\} \sim \{b_n\}$ ricavo

(2) $$\tan b_n = b_n + o(b_n)$$

da $\{\ln(1+b_n)\} \sim \{b_n\}$ ricavo

(3) $$\ln(1+b_n) = b_n + o(b_n)$$

da $\{e^{b_n} - 1\} \sim \{b_n\}$ ricavo

$$e^{b_n} = 1 + b_n + o(b_n)$$

da $\{(1+b_n)^t - 1\} \sim \{t b_n\}$ ricavo

$$(1+b_n)^t = 1 + t b_n + o(b_n)$$

ATTENZIONE. È ovvio che, anche se b_n è piccolo, $\sin b_n \neq \tan b_n$, $\sin b_n \neq \ln(1+b_n)$ ecc.
(1), (2), (3) dicono solo che in tutti e 3 i casi si può approssimare con b_n e quel che avanza "è trascurabile rispetto a b_n". Ma $o(b_n)$ non è il valore di una funzione: assume significati diversi!

ESERCIZI

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n} = \qquad [R: 0]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n} \cdot \frac{1}{n} = \qquad [R: 0]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n+1}\right)^{n} = \qquad [R: e^2]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n+2}{n^2+n+1}\right)^{n^2} = \qquad [R: 0]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+n-2}{n^3-n+2}\right)^{n^3} = \qquad [R: +\infty]$$

ATTENZIONE: il limite non dipende dal confronto tra il grado del numeratore (e del denominatore) e il grado dell'esponente!

$$\lim_{n\to\infty} n\left(5^{(n+1)/(n^2+1)} - 1\right) = \qquad [R: \ln 5]$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{\frac{n^2-1}{n^2+1}} - 1\right) = \qquad [R: -2/3]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^{n}=[1^{\infty}]$$ BANALE

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}\right)^{n}=[1^{\infty}]$$ $$\frac{A}{B}=1+\frac{A-B}{B}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\underbrace{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}}_{a_n}\Big)^{n}=e^{\lim_{n\to+\infty} n a_n}=e^{-\infty}=0$$

Ma $\lim_{n\to\infty} n a_n = ?$

$$n a_n = n\,\frac{1}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}-\frac{n}{\sqrt{n}+1}$$

$$\sim\frac{n}{2n}\qquad\qquad \sim -\sqrt{n}$$

Più semplice:

$$\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}\right)^{n}=\left(\frac{n+1}{n+1+2\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{\left(1+\frac{2\sqrt{n}}{n+1}\right)^{n/2}}\to\frac{1}{e^{\lim\frac{n\cdot2\sqrt{n}}{n+1}}}=0$$

$$\frac{A}{B}=\left(\frac{A^2}{B^2}\right)^{1/2}$$ essendo $A>0,\ B>0$

Confronto di INFINITI e di INFINITESIMI. Di

(1) <u>Due potenze</u> con base $\{a_n\} \to +\infty$ ed esponenti $b, c > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^b}{a_n^c} = \lim_{n\to+\infty} (a_n)^{b-c} \begin{cases} \text{se } b<c : 0 \\ \text{se } b=c : 1 \\ \text{se } b>c : +\infty \end{cases}$$

È un confronto di INFINITI

E se fosse $b<0$ e $c<0$?

sarebbe un confronto di infinitesimi ....

(2) <u>Due esponenziali con base $b, c > 1$</u> ed esponente $\{a_n\} \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^{a_n}}{c^{a_n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b}{c}\right)^{a_n} = \begin{cases} \text{se } b<c : 0 \\ \text{se } b=c : 1 \\ \text{se } b>c : +\infty \end{cases}$$

È un confronto di INFINITI. Se fosse $b, c \in (0,1)$ sarebbe un confronto di infinitesimi.

Se poi $\{a_n\} \to -\infty$ ... si ribalta tutto. ATTENZIONE!!!

(3) <u>Due esponenziali con ugual base</u> $a > 1$ ed esponenti $\{b_n\} \to +\infty$ e $\{c_n\} \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{b_n}}{a^{c_n}} = \lim_{n\to+\infty} a^{b_n-c_n} = \begin{cases} \text{se } \{b_n-c_n\} \to +\infty : +\infty \\ \text{se } \{b_n-c_n\} \to \ell \text{ finito} : a^\ell \\ \text{se } \{b_n-c_n\} \to -\infty : 0^+ \end{cases}$$

È un confronto di INFINITI

Se invece $\{b_n\} \to -\infty$ e $\{c_n\} \to -\infty$ abbiamo un confronto di infinitesimi, da trattare similmente.

(4) <u>Due logaritmi con ugual argomento</u> $\{a_n\} \to +\infty$ e basi $b, c \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b a_n}{\log_c a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b c \cdot \cancel{\log_c a_n}}{\cancel{\log_c a_n}} = \log_b c$$

È un confronto di infiniti: e TUTTI hanno lo stesso ordine di grandezza.

ATTENZIONE: non sono confronti di infinitesimi (risp. infiniti) i seguenti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n^2} \to 0}{2^{n} \to +\infty} = \lim 2^{-n^2-n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n} \to +\infty}{2^{-n^2} \to 0^+} = \lim 2^{n+n^2} = +\infty$$

ESEMPIO di infinitesimi non confrontabili

$$\{a_n\} = \left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\} \to 0$$

$$\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$$

$\Rightarrow$ non sono confrontabili

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\operatorname{sen} n}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}$$

non esiste