Confronti di infiniti e di infinitesimi

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$: dico che $\{a_n\}$ è un infinitesimo

$= +\infty$
$= -\infty$ dico che $\{a_n\}$ è un infinito

Esempi: $\{\log_c n\}$ con $c>1$ (o anche $0<c<1$: tende a $-\infty$), $\{\sqrt{n}\}$, $\{n^3\}$, $\{3^n\}$, $\{n!\}$ sono infiniti.

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due infiniti e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \{a_n\} \text{ infinito di ordine inferiore risp. } \{b_n\} \\ \ell \text{ finito} \neq 0 & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ hanno = ordine di infinito} \\ \pm\infty & \{a_n\} \text{ è infinito di ordine sup. risp. a } \{b_n\} \\ \text{non esiste} & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ SONO NON CONFRONTABILI} \end{cases}$$

Se sono infinitesimi la terminologia si ribalta.

In particolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_c n}{n^\alpha} = 0 \qquad \forall c>1 \text{ e } \forall \alpha>0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{c^n} = 0 \qquad \text{"} \quad \text{"}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0 \qquad \forall c>1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Quindi $\log_c n$ è infinito di ordine INF. a n^α, che a sua volta è infinito di ordine INF. a c^n, che è infinito di ord. INF a $n!$ ecc.

Gli ultimi confronti si basano sul TEOREMA (CRITERIO del RAPPORTO)

se $a_n \geq 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$n! = \begin{cases} 1\cdot 2\cdots n & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0}$$

difende dal limite che confronto ma si ricava con il Teor. del confronto

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^\alpha}{n^\alpha} = 0$$

T. confronto con $\frac{\ln \lfloor n^\alpha \rfloor}{\lfloor n^\alpha \rfloor + 1} \leq \cdots \leq \frac{\ln \lfloor n^\alpha + 1 \rfloor}{\lfloor n^\alpha \rfloor}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha \ln n}{n^\alpha} = 0 \quad \text{se } \alpha \neq 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{1/100}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln n}{n^{1/200}}\right)^2 = \boxed{\alpha = \frac{1}{200}}$$

↳ la base $\to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ il quadrato tende a 0

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+e^n)}{n^{1/100}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$ poiché ho $\frac{\ln(+\infty)}{(+\infty)^{1/100}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(e^n \cdot \left(1+\frac{1}{e^n}\right)\right)}{n^{1/100}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln e^n + \underbrace{\ln(1+e^{-n})}_{= e^{-n} + o(e^{-n})}}{n^{1/100}} =$$

vedi asintotici e "o piccolo"

a rigor di logica qui l'approssimazione non serve visto che la quantità è infinitesima!

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n + \overbrace{e^{-n} + o(e^{-n})}^{\to 0}}{n^{1/100}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{1/100}} = +\infty$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{c^n} = 0$ usando il criterio del rapporto.

In particolare per $c = e$, $\alpha = 3$

Mostro che $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^n} = 0$

$a_n = \frac{n^3}{e^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^3} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{e} \longrightarrow 1 \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

Crit. rapporto $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Mostro che $\left\{\frac{c^n}{n!}\right\} \to 0$ per $n \to \infty$

($c > 1$: prendiamo $c = e$)

$$a_n = \frac{e^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^n} = e \cdot \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= e \cdot \frac{1}{n+1} \longrightarrow e \cdot 0 < 1$$

$\Rightarrow$ (crit rapp.) $\lim_{n \to \infty} \frac{e^n}{n!} = 0$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ pur essendo solo $n^n = e^{n \ln n}$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{1^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow \lim a_n = 0.$

limite di Nepero va saputo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

In alternativa va saputo

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

Esercizi p. 513

1)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n}=[1^{\infty}]=$$

$$=\lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=$$

$\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{-1}{\sqrt{n}}$

$=\frac{-1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty} e^{n\cdot(-1/\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}e^{-\sqrt{n}}=0$$

---

3)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n+1}\right)^{n}=[1^{\infty}]=$$

poiché $\frac{2n+1}{n^2-n+1}=\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+1}{n^2-n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=$$

$$=\lim\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{2}{n}\cdot n}$$

$$=e^{2}$$

Quando privilegiare la scrittura

(1) $\qquad a_n \sim b_n$

e quando privilegiare la scrittura

(2) $\qquad a_n = b_n + o(b_n)$?

Se devo calcolare il limite di un rapporto o di un prodotto basta (1):

$$\lim \frac{a_n}{c_n} = \lim \frac{a_n}{c_n} \cdot \frac{b_n}{b_n} = \lim \frac{b_n}{c_n}$$

$$\lim a_n \cdot c_n = \lim a_n \cdot \frac{b_n}{b_n} \cdot c_n = \lim b_n c_n$$

poiché $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$

Vedi esponente nell'es. 3 pag 5:

$$\frac{2n+1}{n^2-n+1} \sim \frac{2}{n} \quad e \quad \frac{n^2-n+1}{2n+1} \sim \frac{1}{\frac{2}{n}} = \frac{n}{2}$$

Se devo sommare o sottrarre DEVO usare (2) perché non so ciò che trascuro può essere influente.

In $\left(1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ (stesso es. di prima)

non è influente. Nell'es. a pag 8-9 È INFLUENTE: $2\sqrt{n^2+n} = 2n + o(n)$

ma $o(n) \to 1$ e non a 0 !

5)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n-2}{n^3-n+2}\right)^{n^3} = [1^\infty]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2n-4}{n^3-n+2}\right)^{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\boxed{\left(1+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{n^2}{2}}}}_{\to e}{}^{\overbrace{\frac{2}{n^2}\cdot n^3}^{=2n}} = +\infty$$

---

6)
$$\lim_{n\to+\infty} n\left(5^{\frac{n+1}{n^2+1}}-1\right) = [\infty\cdot 0] =$$

osservo che

$$5^{\frac{n+1}{n^2+1}} = e^{\ln 5\cdot\frac{n+1}{n^2+1}} \Rightarrow$$

$$5^{\frac{n+1}{n^2+1}}-1 \sim \ln 5\cdot\frac{n+1}{n^2+1}$$ dato che

$$\left\{\frac{n+1}{n^2+1}\right\}\to 0$$

se $\{b_n\}\to 0$:
$e^{b_n}-1 = b_n + o(b_n)$
o anche
$e^{b_n}-1\sim b_n$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\cdot\ln 5\cdot\frac{n+1}{n^2+1} = \ln 5$$

<u>Oppure</u>

$$\lim_{n\to\infty} n\,\overbrace{\left(\frac{5^{\frac{n+1}{n^2+1}}-1}{\frac{n+1}{n^2+1}}\right)}^{\to\ln 5}\cdot\frac{n+1}{n^2+1} = 1$$

(7

7) $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{\frac{n^2-1}{n^2+1}}-1\right)=[\infty\cdot 0]$

Osservo che

$$\sqrt[3]{\frac{n^2-1}{n^2+1}} = \left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^{1/3}$$

So che $(1+b_n)^t = 1+tb_n+o(b_n)$ o $(1+b_n)^t-1\sim tb_n$ se $\{b_n\}\to 0$

$b_n=-\frac{2}{n^2+1}$ è un infinitesimo $\Rightarrow$

$$\sqrt[3]{\frac{n^2-1}{n^2+1}}-1 = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{n^2+1}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{n^2+1}\right) = -\frac{2}{3}$$

Alternativa

$$= \lim n^2 \underbrace{\frac{\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^{1/3}-1}{-\frac{2}{n^2+1}}}_{\to \frac{1}{3}}\cdot\frac{-2}{n^2+1} =$$

$$= -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3n}{\sqrt{n^2+n}}-2n\right)$$ è pressapoco $2n+\underline{\underline{o(n)}}-2n$?

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{2n-3-2\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$$

Devo razionalizzare il numeratore:

$$a-b=\frac{(a^2-b^2)}{a+b}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n-3)^2-4(n^2+n)}{\underbrace{\sqrt{n^2+n}}_{+\infty}\ (\underbrace{2n-3}_{+\infty}+\underbrace{2\sqrt{n^2+n}}_{+\infty})}\right)=$$

(non ci sono F. I.) → trascuro gli infiniti di ordine inferiore

$$=\lim n\cdot\frac{-12n-4n+9}{\sqrt{n^2}\,(2n+2\sqrt{n^2})}=$$

$\sqrt{n^2}=|n|=n$ essendo $n>0$

$$=\lim \cancel{n}\cdot\frac{-16n+9}{\cancel{n}\,(2n+2n)}=-4$$

Via alternativa

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n-3-2\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \cancel{n}\ \frac{2n-3-2n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)-3}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} =$$

$\sqrt{1+\frac{1}{n}} \to 1$

$$= \lim_{n\to\infty} -3-2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) =$$

$$= -3-2\lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)^{1/2}-1}{1/n} =$$

$$= -3-2\cdot\frac{1}{2} = -4$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_{10} n)^5+5(\ln n)^4}{\sqrt[10]{n-1}-20} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Devo

leggere gli ordini di infinito. Tra

- $(\log_{10} n)^5 = (\log_{10} e)^5 \cdot (\ln n)^5$ e
- $5(\ln n)^4$ quale è l'∞ di ord. sup.?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_{10}e)^5 (\ln n)^5}{5 (\ln n)^4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\log_{10}e)^5}{5} \ln n = +\infty$$

quindi il 1° è di ordine superiore
Il limite dato è

$$= \lim_{n\to\infty} (\log_{10}e)^5 \frac{(\ln n)^5}{\sqrt[10]{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\log_{10}e)^5 \frac{(\ln n)^5}{\sqrt[10]{n}} = 0$$

essendo gli esponenti 5 e $\frac{1}{10} > 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n} + \sqrt[6]{n}}{\sqrt{n} + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{=}{\uparrow}$$

poichè $\frac{\sqrt[6]{n}}{\sqrt[3]{n}} = \frac{n^{1/6}}{n^{1/3}} = n^{-1/6} \to 0$
posso trascurare $\sqrt[6]{n}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/3}}{n^{1/2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1/6}} = 0$$

ESEMPI

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[6]{n}}{\sqrt{n}+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{e^{n/2}} =$$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_{10} n)^5+5(\log_e n)^4}{\sqrt[10]{n-1}-20} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln(n)} =$$

→ $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n\ln(n)}{n^2+1}\right)^n =$$

→ $$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n-1}\right)^{\ln n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n/2}}{n!} =$$

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} =$$

ESERCIZI DA TEMI D'ESAME

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2 - 3n^3)}{n^3}$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^{2/3} - (n-1)e^{1/n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3^{-n} + \sqrt{n} + (\ln n)^4}{n^3 - 2^n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{n+n^2}\right)^{n^2+\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3^n}{n^{4/3} - 2^{2n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3^{-n} - n^{5/4}}{2^{-3n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{2n^2-n} - \sqrt{2n^2+7}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n} - n\ln(1+n)}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{4n^2-5n} - 2n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\ln\left(\sqrt{n+9n^2}\right) - \ln n\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(\ln(1+n^2) + e^{-2n}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + e^{-2n}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{n^2}$$