Limiti notevoli

Per ogni $\{a_n\} \to 0$ allorché $n \to +\infty$:

0) $\{\operatorname{sen} a_n\} \to 0$; $\{\cos a_n\} \to 1$; $\{\operatorname{tg} a_n\} \to 0$

1) $\left\{\dfrac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right\} \to 1 \implies \operatorname{sen} a_n \sim a_n$ se $\{a_n\} \to 0$

2) $\left\{(1+a_n)^{1/a_n}\right\} \to e$ NEPERO

3) $\left\{\dfrac{\ln(1+a_n)}{a_n}\right\} \to 1 \implies \ln(1+a_n) \sim a_n$ se $\{a_n\} \to 0$

4) $\left\{\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}\right\} \to 1 \implies e^{a_n}-1 \sim a_n$ se $\{a_n\} \to 0$

5) $\left\{\dfrac{(1+a_n)^t-1}{a_n}\right\} \to t \implies (1+a_n)^t - 1 \sim t a_n$ se $\{a_n\} \to 0$

Per ogni $\{a_n\} \to +\infty$ allorché $n \to +\infty$

1) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right\} \to e$ ← (VALIDO ANCHE SE $\{a_n\}$ DIVERGE A $-\infty$)

2) $\left\{\dfrac{\ln(a_n)}{a_n^\beta}\right\} \to 0 \quad \forall \beta > 0$

3) $\left\{\dfrac{a_n^\beta}{e^{a_n}}\right\} \to 0 \quad \forall \beta > 0$

- Possibilità di ricavare limiti analoghi con basi $c > 1$ ....
- Ricordare le regole algebriche di calcolo e le regole sulle succ. del tipo $\{\ln(a_n)\}$
- Applicare a $\{a_n^{b_n}\}$ → $a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$

DEFINIZIONE

Una succ. $\{a_n\}$ è "o piccolo" di $\{b_n\}$ per $n \to \infty$ se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Se succede, scrivo $a_n = o(b_n)$.

ATTENZIONE. La nozione di $o(\,)$ non si applica solo a successioni che tendono a zero. Ad es. se

$$a_n = n \quad e \quad b_n = n^2$$

posso dire che $a_n = o(b_n)$.
Oppure se $\{a_n\} \to 0$ e $b_n = 1 \ \forall n$ posso dire che $a_n = o(1)$.

Attenzione: dire che due successioni sono asintotiche non significa che la loro differenza tende a zero!
Ad es. $\lim_{n \to \infty} \frac{n+2}{n} = 1$ ma

$(n+2) - n = 2 \to 2 \neq 0$. Ciò che posso dire è che $(n+2) - n = o(n)$ poiché $2 = o(n)$. In generale:

Se $\{c_n\} \sim \{b_n\}$, cioè se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{c_n}{b_n} = 1$$

allora $c_n - b_n = o(b_n)$, cioè $c_n = b_n + o(b_n)$.

Infatti $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{c_n - b_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{c_n}{b_n} - 1 \right) = 0.$

Vale ovviamente anche il viceversa.

Allora se $\{b_n\} \to 0$

da $\{\sin b_n\} \sim \{b_n\}$ ricavo

(1) $$\sin b_n = b_n + o(b_n)$$

da $\{\tan b_n\} \sim \{b_n\}$ ricavo

(2) $$\tan b_n = b_n + o(b_n)$$

da $\{\ln(1+b_n)\} \sim \{b_n\}$ ricavo

(3) $$\ln(1+b_n) = b_n + o(b_n)$$

da $\{e^{b_n} - 1\} \sim \{b_n\}$ ricavo

$$e^{b_n} = 1 + b_n + o(b_n)$$

da $\{(1+b_n)^t - 1\} \sim \{t b_n\}$ ricavo

$$(1+b_n)^t = 1 + t b_n + o(b_n)$$

ATTENZIONE. È ovvio che, anche se b_n è piccolo, $\sin b_n \neq \tan b_n$, $\sin b_n \neq \ln(1+b_n)$ ecc.
(1), (2), (3) dicono solo che in tutti e 3 i casi si può approssimare con b_n e quel che avanza "è trascurabile rispetto a b_n". Ma $o(b_n)$ non è il valore di una funzione: assume significati diversi!

Quando privilegiare la scrittura

(1) $$a_n \sim b_n$$

e quando privilegiare la scrittura

(2) $$a_n = b_n + o(b_n) \ ?$$

Se devo calcolare il limite di un rapporto o di un prodotto basta (1):

$$\lim \frac{a_n}{c_n} = \lim \frac{a_n}{c_n} \cdot \frac{b_n}{b_n} = \lim \frac{b_n}{c_n}$$

$$\lim a_n \cdot c_n = \lim a_n \cdot \frac{b_n}{b_n} \cdot c_n = \lim b_n c_n$$

poiché $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$

Vedi esponente nell'es. 3 pag 5:

$$\frac{2n+1}{n^2-n+1} \sim \frac{2}{n} \quad \text{e} \quad \frac{n^2-n+1}{2n+1} \sim \frac{1}{\frac{2}{n}} = \frac{n}{2}$$

Se devo sommare o sottrarre DEVO usare (2) perché non so se ciò che trascuro può essere influente.

In $\ln\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ (stesso es. di prima) non è influente. Nell'es. a pag 8-9 È INFLUENTE: $2\sqrt{n^2+n} = 2n + o(n)$ ma $o(n) \to 1$ e non a 0!