LIMITI DI FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Siano: (a,b) un qualunque intervallo (anche illimitato: $a=-\infty$ e/o $b=+\infty$);

- $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funz. reale di variab. reale;
- $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$;
- $c \in (a,b)$ oppure $c=a$ (event. $a=-\infty$) oppure $c=b$ (event. $b=+\infty$)

cioè c non necessariamente appartiene all'I.D. di f, ma ne è un punto di accumulazione.

Allora si dice che

al tendere di x a c la funzione $f(x)$ tende al limite ℓ

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$$

se per ogni successione $\{x_n\}$ che tende a c la successione $\{f(x_n)\}$ tende a ℓ

Es. So che per ogni $\{x_n\} \to 0$ si ha $\left\{\frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n}\right\} \to 1$
Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

ATTENZIONE. Non basta 1 successione:

se $x_n = \pi n$ $\quad \{\operatorname{sen} x_n\} = \{0\} \to 0$

ma

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \text{ non esiste!}$$

Infatti se si prende la successione di termine generale

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\{\operatorname{sen} x_n\} \longrightarrow 1 \neq 0.$$

La definizione data va bene tanto nel caso in cui $\ell \in \mathbb{R}$ (diremo che $f(x)$ CONVERGE a ℓ) che nei casi in cui $\ell = +\infty$ oppure $-\infty$ (diremo che $f(x)$ diverge a $+\infty$ o a $-\infty$)

dico che il limite di $f(x)$ per $x \to c$ (finito o no) è L (finito) <u>dal</u> <u>di sopra</u> se

$\forall \{x_n\} \to c$ si ha

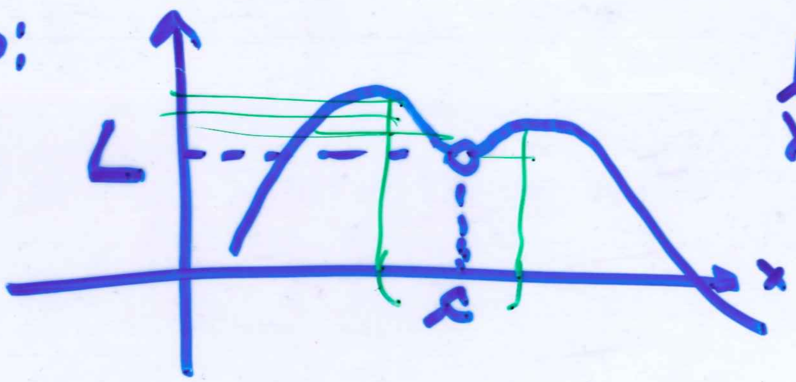
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L^+$$

cioè almeno da un certo n in poi tutti gli elem. della succ. $\{f(x_n)\}$ sono $\geq L$.

Escrivo

$$\lim_{x \to c} f(x) = L^+$$

Esempio:



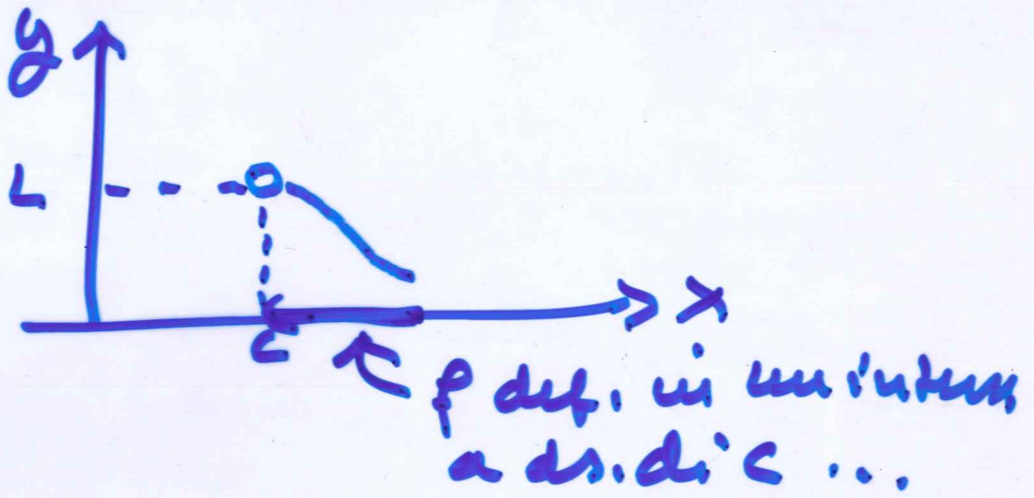
$$\lim_{x \to c} f(x) = L^+$$

dico che il limite per x che tende a c (FINITO) da DESTRA è L (finito o no) se

$\forall \{x_n\} \to c^+$ (da ds!)

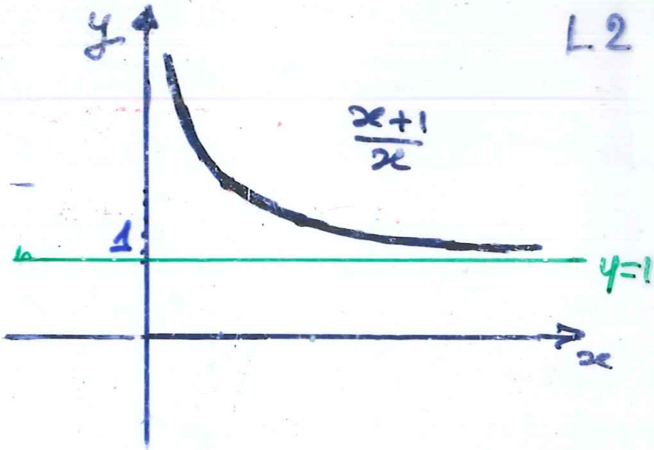
si ha $\{f(x_n)\} \to L$

Analogamente da sin.



Esempi.

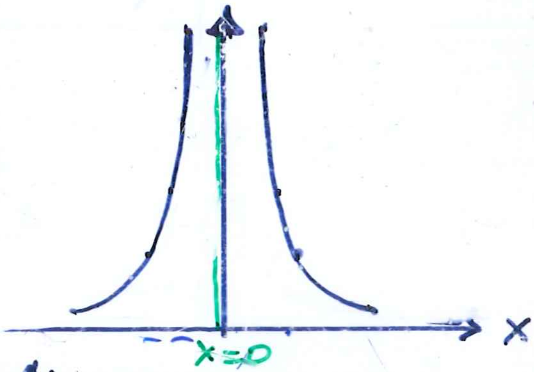
1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$



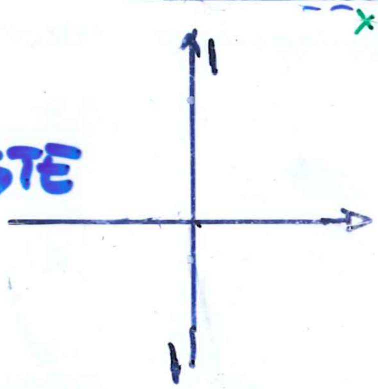
anzi $\frac{x+1}{x}$ tende a 1 dal di sopra

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1^+$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$



3. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = ?$ **NON ESISTE**



$\{a_n\} \to 0+ \quad \left\{\frac{1}{a_n}\right\} \to +\infty$

$\to 0- \quad \left\{\frac{1}{a_n}\right\} \to -\infty$

e se $\{a_n\} \to 0$ senza direzione $\lim \frac{1}{a_n}$ non esiste

Limite per x che tende a c (FINITO) da DESTRA (o da SINISTRA) ....

$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

Limite per eccesso (o per difetto) ....

Asintoti: se il grafico della funzione tende a disporsi come una retta.

per $x \to c$ finito: se $\lim_{x \to c+} f(x) = +\infty$ (o ... segni assortiti)

ASINTOTO VERTICALE

per $x \to c$ infinito: se $\lim_{x \to c} f(x) = \ell \neq \pm\infty$: ORIZZONTALE

se $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$: ? OBLIQUO

Asintoto obliquo

Può succedere che ci sia solo se si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{o}: = -\infty)$$

[oppure

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{o}: = -\infty)$$]

È una retta non parallela a nessuno dei 2 assi

$\Rightarrow$ equazione $y = mx + q$ con $m \neq 0$

e tale che la distanza tra il punto

$P \equiv (x, f(x))$ del grafico di f

e il punto $Q \equiv (x, mx+q)$ della retta

tenda a 0 quando $x \to +\infty$ [oppure a $-\infty$]

Come lo cerco?

(1) Controllo che sia in esame un limite per $x \to +\infty$ (o $x \to -\infty$)

Se no: NON DEVO CERCARE l'asintoto obliquo. Altrimenti

(2) Controllo che $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (o $\lim_{x\to-\infty} f(x)$) sia $+\infty$ oppure $-\infty$

se no: NON DEVO CERCARE l'asintoto obliquo. Altrimenti

(3)(*) Esiste ed è finito e $\neq 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ (o $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$) ?

se non esiste o non è finito o è $= 0$: L'ASINTOTO NON C'È.

Altrimenti chiamo m questo limite e passo a:

(4) Esiste ed è finito $\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$?

se non esiste o non è finito : L'ASINTOTO NON C'È

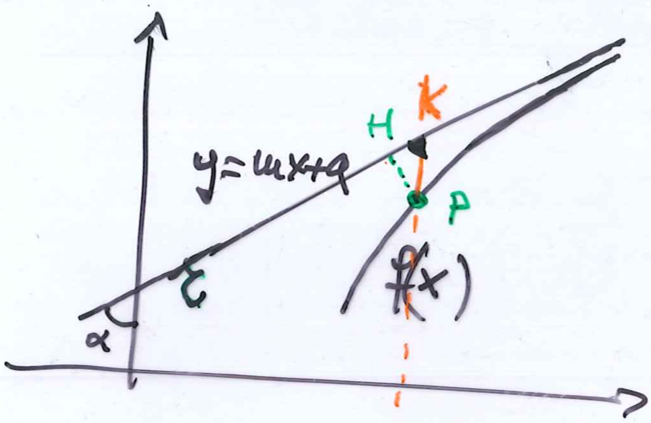
Altrimenti chiamo q questo limite.

Ho così trovato l'asintoto:

$$y = mx + q.$$

(*) La risposta SÌ a questo punto significa che $f(x)$ ha lo stesso ordine di ∞ di una retta (... cioè ordine 1).

L3.1



Per definire l'asintoto dovrei chiedere $\{\overline{PH}\} \to 0$

Ma $\overline{PK} = \dfrac{\overline{PH}}{\sin\alpha}$ ove α è la misura dell'angolo tra la retta r e l'asse y.

Basta chiedere $\{\overline{PK}\} \to 0$. Cioè, se

$$\left.\begin{array}{l} P = (x, f(x)) \\ K = (x, mx+q) \end{array}\right\} \text{ voglio che}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (mx+q)\right) = 0$$

$\boxed{\text{CASI IN CUI L'ASINTOTO OBLIQUO NON C'È}}$

$\boxed{\text{Caso 1}}$

$f(x) = \sqrt{x}$

① $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ è un infinito

Ma:

② $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ non hanno lo stesso ordine di ∞

non ci può essere asintoto obliquo

$\boxed{\text{Caso 2}}$

$f(x) = x + \sqrt{x}$

① $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{x} = +\infty$ è un infinito

② $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = 1 + 0 = 1$ hanno lo stesso ordine di ∞

SONO ASINTOTICHE per $x \to +\infty$

Ma

③ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x+\sqrt{x}) - 1(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

non c'è asintoto! $\Longleftarrow$ non è finito

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} \qquad y=\sqrt{x^2-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} y^2=x^2-1 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

È la metà sopra l'asse x di un'iperbole equilatera
$\Rightarrow$ gli asintoti ci sono!

• Illustro il metodo per il calcolo dell'asintoto per $x\to+\infty$

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$ ragionando sulla succ. $\{x_n\}\to+\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2(1-1/x^2)}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1-1/x^2}}{x}$

$x>0$ poiché le succ. $\{x_n\}\to+\infty$ hanno termini che per $n>k$ opportuno sono $> M=0$ per def di divergenza.

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1 = m$

(5) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - 1 \cdot x = [\infty - \infty]$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-1} + x} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{|x|+x} \underset{x>0}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{2x} = 0^-$

$\Rightarrow$ eq dell'asintoto obliquo per $x \to +\infty$

$y = 1 \cdot x + 0$

cioè $y = x$

dice che il grafico giace almeno da un certo $x > 1$ in poi al di sotto dell'asintoto.

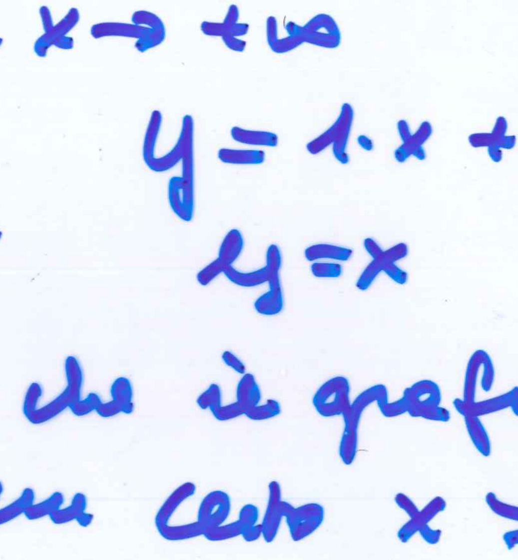
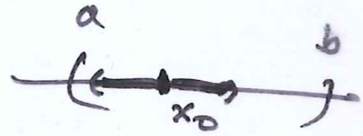


GRAFICO di $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ per $x \geq 1$ (per $x \leq -1$ è simmetrico rispetto all'asse y)

Funzioni continue

Def. Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale.

Sia $x_0 \in (a,b)$



Dico che $f(x)$ è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

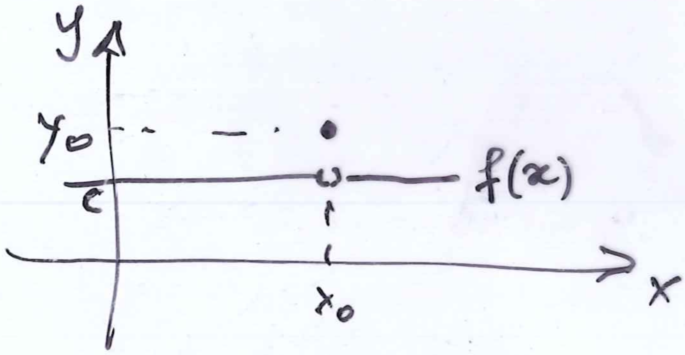
Esamino la definizione

0°) la funzione è definita in x_0

1°) la funzione ha limite per $x \to x_0$

2°) tale limite è finito

3°) tale limite coincide con il valore di f in x_0

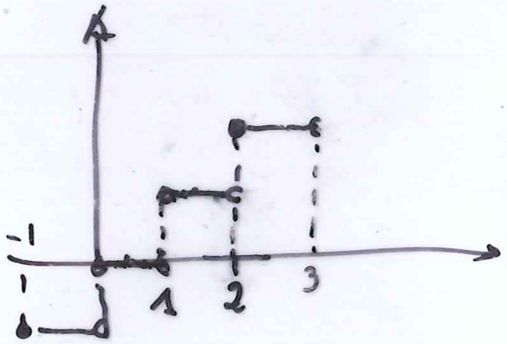


non è continua in x_0 poiché $f(x_0) = y_0$ mentre $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\ell \neq y_0$.

Dato che esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esistono anche $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e sono tutti uguali a $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

In part.$^{(1°)}$ se il $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

non esiste il limite e quindi $f(x)$ non è continua.



$\lim_{x \to 1} \lfloor x \rfloor$ non esiste

$\lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$

) diversi!

$\lim_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1 = f(1)$

.... $\lfloor x \rfloor$ è continua da destra in $x = 1$.

Infatti:

Dico che $f(x)$ è <u>continua da destra</u> in $x = x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

(analogo da sinistra).

Fin qui si sono esaminate 2 cause di NONCONTINUITA'

•) non vale 3°), cioè il limite esiste finito ma è $\neq f(x_0)$

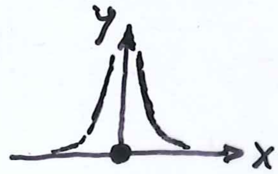
DISCONTINUITA' ELIMINABILE

•) non vale 1°), ma il limite destro e sinistro esistono finiti (eventualmente uno dei due è $= f(x_0)$)

DISCONTINUITA' DI PRIMA SPECIE o A SALTO

<u>Altre cause</u>

•) <u>non vale 2°</u> : $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

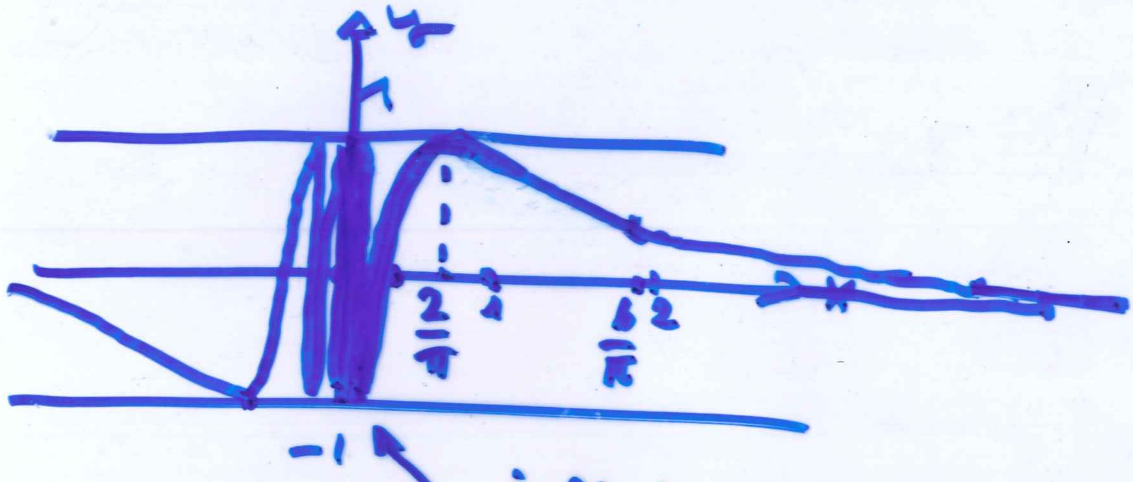


il limite esiste ma non è finito e quindi è $\neq f(x_0)$.

•) <u>non vale 1°</u> e almeno uno tra limite destro e limite sinistro non esiste

DISCONTINUITÀ DI 2ª SPECIE : $f(x) = \begin{cases} \sin 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ID $x \neq 0$



$f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \sin \pi = 0$

$f\left(\frac{2}{\pi}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$f\left(\frac{3}{\pi}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{6}{\pi}\right) = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{12}{\pi}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \ldots$

$f\left(\frac{2}{3\pi}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

$f\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \sin 2\pi = 0$

CALCOLO dei LIMITI di funzione

INGREDIENTI :
1) OPERAZIONI SUI LIMITI
2) LIMITI FONDAMENTALI (da SUCCESSIONI)
3) TRASFORMAZIONI SUI LIMITI

1. OPERAZIONI SUI LIMITI

Sia $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ ed esistano

$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to c} g(x) = \ell'$ (ℓ, ℓ' eventualm infiniti)

(1) $\lim_{x \to c} f(x) \pm g(x) = \ell \pm \ell'$ ... salvo forma di indecisione $\infty - \infty$

(2) $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot \ell'$ ... salvo forma di indecisione $0 \cdot \infty$

(3) $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}$ purchè $g(x) \neq 0$ in tutti i punti di un intorno di c, diversi da c e purchè $\ell' \neq 0$.

ATTENZIONE AL CASO $\frac{\ell}{0}$: se $\lim_{x \to c} g(x) = 0^+$ ... (oppure 0^-)...
Se invece $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ senza verso ...

FORME DI INDECISIONE : $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$

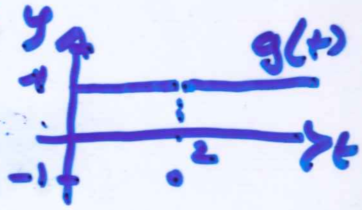
LIMITI DI FUNZ. COMPOSTE.

Siano $f : (a,b) \to \mathbb{R}$; $g : (a', b') \to \mathbb{R}$ con $f\big((a,b)\big) \subseteq (a', b')$ (•)
(a, b, a', b' eventualmente infiniti) e sia f non costante. Se

$\lim_{x \to c} f(x) = c'$ (con $c' \in (a', b')$) e

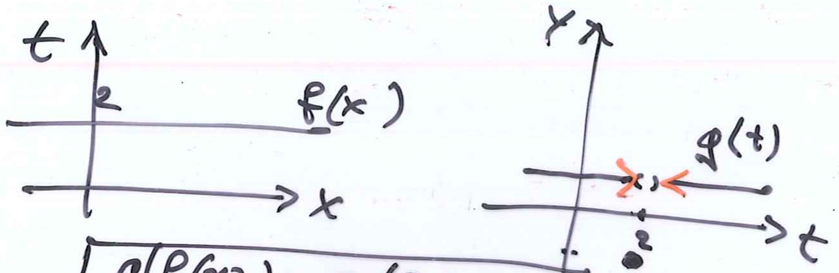
$\lim_{t \to c'} g(t) = \ell$

allora $\lim_{x \to c} g(f(x)) = \ell$



(•) Se $f(x)$ è costante possono succedere brutte cose:
es. $f(x) = 2$
$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq 2 \\ -1 & \text{se } t = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow g(f(x)) = -1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} g(f(x)) = -1$.
INVECE $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ e $\lim_{t \to 2} g(t) = 1$

fine pag. L4



$$\boxed{g(f(x)) = g(2) = -1}$$

$$\lim_{x \to 0} g(f(x)) = -1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \qquad \neq$$

$$\lim_{t \to 2} g(t) = 1$$

DALLE regole a pag L4 $\Downarrow$

OSSERVAZIONI che riguardano le FUNZIONI CONTINUE

Se $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ e $g:(a,b) \to \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in (a,b)$, allora

$f(x) \pm g(x)$ è cont. in x_0

$f(x)g(x)$ è cont. in x_0

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è cont. in x_0 se $g(x_0) \neq 0$

Se $f(x)$ è cont. in x_0 $\quad (f:(a,b) \to (a',b'))$

$g(t)$ " " " $f(x_0)$ $\quad (g:(a',b') \to \mathbb{R})$

allora

$$g(f(x)) \text{ è cont. in } x_0$$

Questo significa che se individuo una collezione di funz. continue in ogni punto di un intervallo di $\mathbb{R}$ (event. $\mathbb{R}$), poi i limiti nei punti di tali intervalli di funzioni ottenute per $\pm$, $\cdot$, $\div$, composiz... si calcolano per sostituzione.

Funzioni certamente continue in ogni punto in cui sono definite. Si dimostra che sono tali tutte le funzioni elementari, cioè:

- funzioni costanti
- x^n $(n \in \mathbb{N})$, x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$
- a^x $(a \in (0,1) \cup (1,+\infty))$
- $\log_a x$ con $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$
- $\operatorname{sen} x$; $\cos x$; $\operatorname{tg} x$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\right)$
- $\operatorname{arcsen} x$; $\operatorname{arccos} x$; $\operatorname{arctg} x$

$[-1, 1]$ è il loro I.D.

da destra

da sinistra

$\sqrt{x}$: I.D. $[0, +\infty)$ è conti. da destra

Esempio di calcolo di limite FACILE:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x + 4}{5 + \ln x}$$

al numeratore la funz. è conti. in $x = 1$?

al denom. è conti. in $x = 1$

Si annulla in $x = 1$?

sì perché somma di potenze o costanti

sì perché somma di una cost. e di un logaritmo

$\ln 1 + 5 = 0 + 5 \neq 0 \Rightarrow$ ND

Allora il limite lo calcolo sostituendo $= \frac{1-1+4}{5+0} = 4/5$

INVECE:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x + 4}{\ln x} = \frac{4}{0}$$

il limite non c'è!

perché $\lim_{x \to 1^+} \ln x = 0^+$

$\lim_{x \to 1^-} \ln x = 0^-$

2. LIMITI FONDAMENTALI

(A) Sia $f(x)$ una delle funzioni (elementari)

$$x^\alpha \quad , \quad a^x \quad , \quad \log_a x \;, \; \operatorname{sen} x \;, \; \cos x$$

e sia c un numero appartenente all'I.D. di $f(x)$ (∘)
allora

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0+ & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0+} x^\alpha = \begin{cases} 0+ \text{ se } \alpha > 0 \\ 1 \text{ se } \alpha = 0 \\ +\infty \text{ se } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0+ & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0+ & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$x = -t \;,\; t \to +\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} \underbrace{a^{-t}}_{= \left(\frac{1}{a}\right)^t} = \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ NON ESISTE (idem per $x \to -\infty$ e per $\cos x$)

$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \pi/2$; $\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\pi/2$

Applicando il teorema sui limiti di funz. composte
Si ha se $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$: $\lim_{x \to c} a^{f(x)} = a^\ell$, $\lim_{x \to c} \log_a f(x) = \log_a \ell$

(∘) Merita attenzione il caso x^α con α reale > 0

Il suo ID è $[0, +\infty)$ ma non si può calcolare
$\lim_{x \to 0} x^\alpha$ (per $x<0$ la funzione non è definita). Però

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0^\alpha = 0.$$

La situazione è più semplice per α intero positivo

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = [0^0] \ ?$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln x} \quad (e^{0\cdot\infty})$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x =$$

$$= \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} =$$

$$= \lim_{t\to +\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0^-$$

Trasformazione che manda 0^+ in $+\infty$ e $+\infty$ in 0^+

$$\lim_{x\to 0^+} e^{x \ln x} = e^{0^-} = 1^-$$