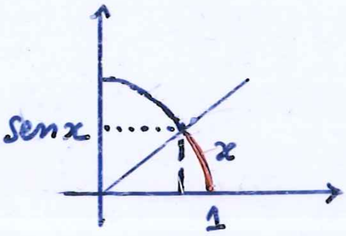
Più in generale, se $\lim_{x\to c} f(x)=\ell$ e $\lim_{x\to c} g(x)=\ell'$

(c, ℓ, ℓ' eventualmente infiniti)

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \ell^{\ell'}$$

Forme di indecisione ∞^0, 0^0, 1^∞: evidenziate scrivendo $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$
e ricordando la forma di indecisione del prodotto.

(B) • $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$



• NEPERO e conseguenze:

$$\lim_{x\to+\infty} (1+1/x)^x = e = \lim_{x\to-\infty} (1+1/x)^x$$

$$\lim_{z\to 0^\pm} (1+z)^{1/z} = e = \lim_{z\to 0} (1+z)^{1/z}$$

$$\lim_{z\to 0^\pm} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1 = \lim_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^t-1}{x} = t \quad \text{per ogni } t \text{ reale}$$

• CONFRONTO di INFINITI

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \qquad \forall \alpha>0,\ \forall \beta>0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \qquad \forall \alpha>0,\ \forall a>1$$

• CONFRONTI TRA INFINITI E INFINITESIMI DELLO STESSO TIPO

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

con

① $c \in (a,b)$
$-\infty$ $+\infty$
o $c = -\infty$
$+\infty$

② $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Significa

$\forall \{x_n\} \to c$ si ha

$\{f(x_n)\} \to L$

Valgono tutti i teor visti x le succ.
Ad es. vale:

TEOR. PERM. SEGNO.

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$

se $\exists \lim_{x \to c} f(x) = L \neq 0$ e finito

allora esiste tutto un intervallo

$U = (c-\delta, c+\delta) \subseteq (a,b)$ t.c. $\forall x \in U$

si ha che

$f(x)$ ha lo stesso <u>segno</u> di L.

se $\begin{cases} b=+\infty \text{ e} \\ c=+\infty \end{cases}$ ... idem con

$U=(M,+\infty)$

se $\begin{cases} a=-\infty \\ c=-\infty \end{cases}$ idem con

$U=(-\infty,N)$

---

se $\exists \lim_{x\to c} f(x)=+\infty$ significa che

$\forall \{x_n\}\to c \ , \{f(x_n)\}\to+\infty$

cioè $\forall \{x_n\}\to c$ si ha $\boxed{\begin{array}{l}\forall M>0\ \exists k\in\mathbb{N} \text{ t.c.} \\ \forall n\geq k \quad f(x_n)>M\end{array}}$

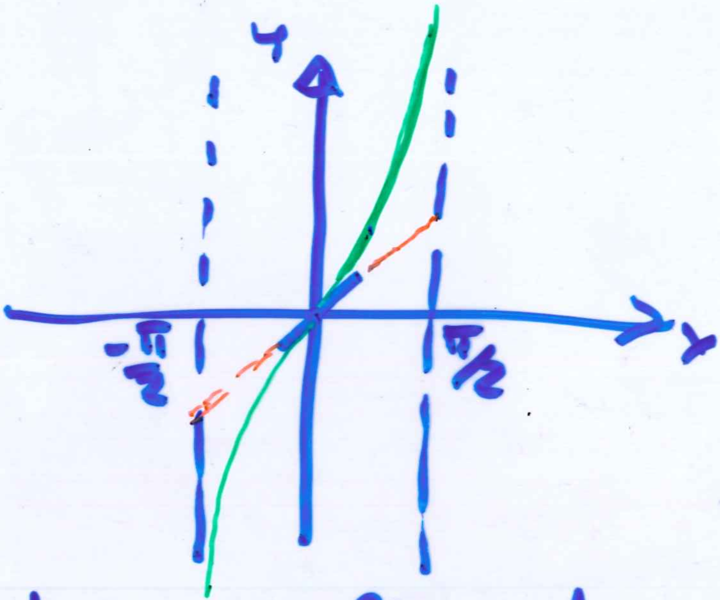
$\Rightarrow \exists\ k\in\mathbb{R}$ t.c. $f(x)>M>0$

Idem per $-\infty$.

Quindi il teor. della perm. del segno se il limite è un ∞ è ovvio!

Dico che la funz. $f(x)$ (ove $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \ni c$) è <u>asintotico</u> alla funz. $g(x)$ (ove $g:(a,b) \to \mathbb{R}$) <u>per $x \to c$</u> e scrivo $f(x) \sim g(x)$ se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$



Solo per $x \to 0$ $\operatorname{tg} x \sim x$

Sempre nelle stesse ipotesi su $f(x)$ e $g(x)$, dico che $f(x)$ è <u>"o piccolo" di $g(x)$</u> <u>per $x \to c$</u> e scrivo

$$f(x) = o(g(x))$$

se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

3. TRASFORMAZIONI SUI LIMITI

(Sottocaso del discorso sul limite di funzioni composte)

È talora utile applicare le seguenti sostituzioni

$\boxed{t=-x}$ oppure $\boxed{t=1/x}$ oppure $\boxed{t=x-a}$

La prima trasforma limiti per $x\to-\infty$ in limiti per $t\to+\infty$; la seconda trasforma limiti per $x\to 0+$ in limiti per $t\to+\infty$ e viceversa; la terza trasforma i limiti per $X\to a$ in limiti per $t\to 0$

ESEMPI

- $$\lim_{x\to 0+} x\ln x = [0\cdot\infty] \overset{t=1/x}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\ln t}{t} = 0^-$$

- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(1+t)}{-t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{-t} = 0^-$$

- $$\lim_{x\to\pi/3} \frac{3x-\pi}{\operatorname{sen}(x-\pi/3)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{t=x-\pi/3}{=} \lim_{t\to 0}\frac{3t}{\operatorname{sen} t} = 3$$ limiti notevoli!

- $$\lim_{x\to 0+} x(e^{1/x}-1) = [0\cdot\infty] \overset{t=1/x}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}(e^t-1) = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t} = +\infty$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}(1-e^{-t}) =$$

- Qui non c'è indecisione, ma si vede meglio così

$$\lim_{x\to 0-} x(e^{1/x}-1) \overset{t=-1/x}{=} \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{t}(e^{-t}-1) = \lim_{t\to+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t} = 0$$

- $$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x}+x = [\infty-\infty]$$ Si può risolvere direttamente. Oppure: $t=-x$

$$= \lim_{t\to+\infty}\sqrt{t^2+2t}-t = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^2+2t-t^2}{\sqrt{t^2+2t}+t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{|t|+t} =$$

$$\underset{\substack{t>0 \\ \text{poiché} \\ t\to+\infty}}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{t+t} = 1$$

(L7.1

$$\lim_{x\to-\infty} 3x+\sqrt{9x^2+5x} = -\infty+\infty$$
$[\infty-\infty]$

$$=\lim_{x\to-\infty} 3x+3|x|+o(x)=$$

$|x|=-x$
poichè $x<0$
essendo
$x\to-\infty$

$$=\lim_{x\to-\infty} 3x-3x+o(x)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty} o(x) \quad ??$$

o sostituisco $x=-t$ e razionalizzo con $t\to+\infty$
oppure

1) Razionalizzo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{-9x^2}+\cancel{9x^2}+5x}{-3x+\sqrt{9x^2+5x}} =$$

$\sqrt{9x^2+5x}=$
$=\sqrt{9x^2}+o(x)=$
$=3|x|+o(x)=$
ATTENZIONE $\to$ $=-3x+o(x)$

$$=\lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{-3x-3x+o(x)} =$$

$$=\lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{-6x} = -\frac{5}{6}$$

oppure

2) uso i limiti notevoli:

$$\lim_{x \to -\infty} 3x + \sqrt{9x^2+5x} = [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 3x + \sqrt{9x^2\left(1+\frac{5}{9x}\right)} = \ldots\ldots$$

$|x| = -x$

$$= \lim_{x \to -\infty} 3x - 3x\sqrt{1+\frac{5}{9x}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -3x\left(\sqrt{1+\frac{5}{9x}} - 1\right) =$$

$z \to 0$

$(1+z)^t - 1 \sim tz$ se $z \to 0$

$t = 1/2$

$$= \lim_{x \to -\infty} -3x\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9x}\right) = -\frac{5}{6}$$

Esercizi

1. Mostrare che

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;

$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

2. Calcolare:

$\lim_{x \to 1} \frac{(1-x)\operatorname{sen}(1-x)}{(\ln x)^2}$ fatto

- $\lim_{x \to 0+} \frac{2x + x^2 \ln x}{\ln(1+x)}$ fatto

$\lim_{x \to 0} \frac{1+2\ln(1-x)}{x^2 - 2e^x}$ $\left[R: -\frac{1}{2}\right]$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)+x}{2(e^x+x)}$ $[R: 0]$

- $\lim_{x \to 1} \frac{\cos(x-1)-1}{(\ln x)^4}$ $[R: -\infty]$

$\lim_{x \to 3} \frac{\operatorname{tg} 2(3-x)}{x-3}$ $[R: -2]$

$\lim_{x \to 1/2} \frac{e^{2x-1}-1}{2x^2-x}$ $[R: 2]$

$\lim_{x \to -\infty} x \ln(1+e^x)$ $[R: 0^-]$

- $\lim_{x \to -\infty} x(e^{1/x}-1)$ fatto

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\,(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2\,(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\underbrace{\cos x}_{\to 1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1$$

$\Rightarrow \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ per $x\to 0$

cioè $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ "

cioè $\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x\to 0$

$$\boxed{\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(1-x)\operatorname{sen}(1-x)}{(\ln x)^2} = \left\{\frac{0\cdot 0}{0\cdot 0}\right\} \left[\frac{0}{0}\right]$$

guardare il limite: — non guardare la variabile

$$\boxed{\text{sost.: } x-1=t \Rightarrow x=t+1}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-t \operatorname{sen}(-t)}{[\ln(1+t)]^2} =$$

$$\boxed{\text{per } t \to 0 \quad \ln(1+t) \sim t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t \operatorname{sen} t}{t^2} = 1 .$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{2x + x^2 \ln x}{\ln(1+x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \left(\underbrace{\frac{2x}{\ln(1+x)}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{x}{\ln(1+x)}}_{\to 1} \cdot x \ln x \right) =$$

$$= 2 \cdot 1 + \lim_{x \to 0+} 1 \cdot x \ln x = 2$$

poiché $\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} = 0 .$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)-1}{(\ln x)^4} = \left\{ \frac{\cos 0-1}{(\ln 1)^4} = \frac{1-1}{0^4} \right.$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] \quad \text{sost. } \begin{array}{l} x-1=t \\ x=1+t \\ t\to 0 \end{array}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos t-1}{(\ln(1+t))^4} =$$

per $t\to 0$ $\boxed{\begin{array}{l} \cos t-1 \sim -\frac{t^2}{2} \\ \ln(1+t) \sim t \end{array}}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-t^2/2}{t^4} = \lim_{t\to 0} -\frac{1}{2t^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+x}{2(e^x+x)} =$$

$\boxed{\begin{array}{c} \text{per } x\to 0 \\ \ln(1+x)\sim x \\ \text{o meglio} \\ \ln(1+x) = x+o(x) \end{array}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x+o(x)}{2(\underbrace{e^x}_{1}+\underbrace{x}_{0})} = \frac{0}{2} = 0$$

$1+0=1$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) = [\infty\cdot 0]$$

$$\boxed{t = -\frac{1}{x} \Rightarrow x = -\frac{1}{t} \Rightarrow t \to 0^+}$$

$$\overset{\downarrow}{=} \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{t}\left(e^{-t}-1\right) =$$

$$\boxed{e^{-t}-1 \sim -t \quad \text{per } t\to 0}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{t}(-t) = 1$$

oppure direttamente osservando che $\frac{1}{x} \to 0$ e quindi

$$e^{1/x}-1 \sim \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$x = \tan z$

$\arctan(\tan z) = z$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\tan z} = 1 \Rightarrow$$

per $x \to 0$

$\arctan x \sim x$

$\arctan x = x + o(x)$

limiti e asintoti (?) della funz. L8.5

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2} - x$$

agli estremi dell' I.D.

I.D. $= \mathbb{R}$

funzioni: $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2} - x = (\infty - \infty)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)} - x =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} - x =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3} - 1\right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{x}\right) = -\frac{1}{3}$$

l'asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$ ha eq. $y = -\frac{1}{3}$

limiti e asintoti negli estremi dell'D
di $f(x) = 2x - 2\sqrt{x^2-3x+2}$