limiti e EVENTUALI asintoti negli estremi dell'ID

di $f(x) = 2x - 2\sqrt{x^2-3x+2}$

Sol.

I.D. $x^2-3x+2 \geq 0 \iff (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

La $f(x)$ è continua ove definita

cont. da sinistra in 1 e
da destra in 2

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 - 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 4$$

All'∞

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$$

Ha asintoto obliquo?

Intanto guardo l'altro limite:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = [\infty - \infty] =$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2\,\frac{\cancel{x^2} - (\cancel{x^2} - 3x + 2)}{x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{x + |x|} :$$

$|x| = x$ poiché $x \to +\infty \implies = 6/2 = 3$

Quindi per $x \to +\infty$ $f(x)$ ha un asint. orizz. di eq. $y=3$

Torno a $\lim\limits_{x \to -\infty} 2(x-\sqrt{x^2-3x+2}) = -\infty$

Ricerca dell'event. asint. OBLIQUO

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} 2\left(1-\frac{\sqrt{x^2}}{x}\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)=$$

poiché $x \to -\infty$ $\sqrt{x^2}=|x|=-x$

$$= \lim_{x \to -\infty} 2\left(1-\left(\frac{-x}{x}\right)\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)=$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 2\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)=4$$

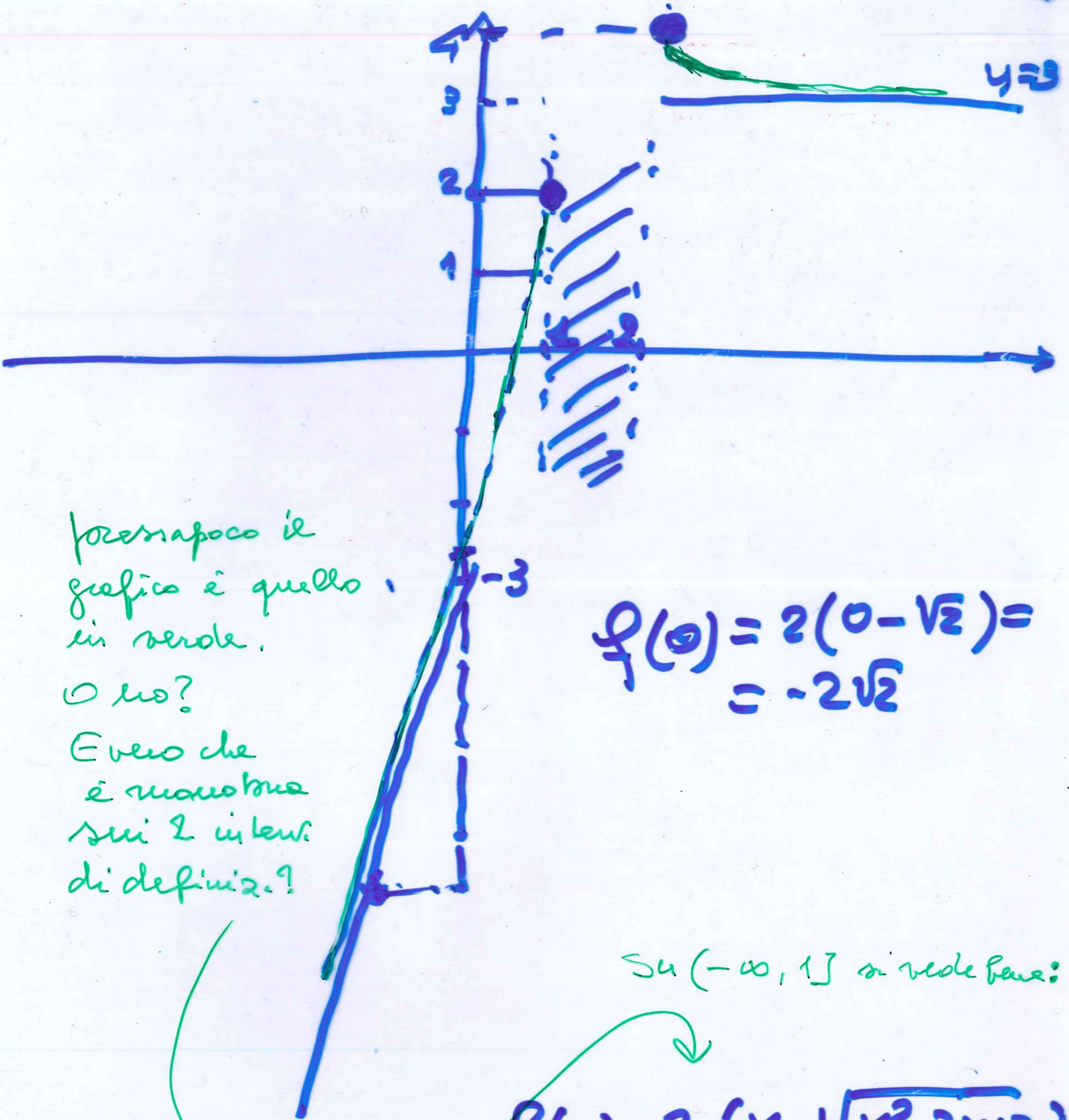
$$\boxed{m=4}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)-4x = \lim_{x \to -\infty} -2(x+\sqrt{x^2-3x+2})=$$

$$=[\infty-\infty] = \lim_{x \to -\infty} -2\,\frac{-\cancel{x^2}+(\cancel{x^2}-3x+2)}{-x+\sqrt{x^2-3x+2}}=$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{6x}{-x+|x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{6x}{-2x} = -3 = q$$

ASINTOTO X $x \to -\infty$ ha eq.: $y=4x-3$



pressapoco il grafico è quello in verde.

O no?

È vero che è monotona sui 2 intervalli di definiz.?

$$f(0) = 2(0-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$$

Su $(-\infty, 1]$ si vede bene:

$$f(x) = 2\left(x-\sqrt{x^2-3x+2}\right)$$

per $x \geq 2$ la radice cresce

per $x \leq 1$ la radice decresce

per $x < 1$

$-\sqrt{x^2-3x+2}$ cresce $\Leftarrow$

sommato a x che cresce $\Rightarrow f(x)$ cresce.

Intersezioni con gli asintoti e segno di $f(x) = 2\left(x - \sqrt{x^2-3x+2}\right)$

① $y = 3$

$$2x - 2\sqrt{x^2-3x+2} \geqq 3 \iff$$

$$2\sqrt{x^2-3x+2} \leqq 2x-3$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \text{ o } x \geq 2 \\ 2x-3 \geq 0 \\ 4(x^2-3x+2) \leq (2x-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{\begin{matrix} x \leq 1 \quad \text{o} \quad x \geq 2 \\ x \geq 3/2 \end{matrix}} \implies x \geq 2 \\ -\cancel{12x} + 8 \leq -\cancel{12x} + 9 \end{cases}$$

sempre! < strett.

$\implies$ non ci sono intersez. e $f(x)$ (i.e. graf. di $f(x)$) giace sopra la retta $y=3$

$\implies \forall x \geq 2 \quad f(x) > 0$ Scopro INFo. sul segno

· —— ·

② $y = 4x - 3$: $2x - 2\sqrt{x^2-3x+2} \geq 4x-3$?

$$2\sqrt{x^2-3x+2} \le 3-2x$$

$$\begin{cases} x \le 1 \quad o \quad x \ge 2 \\ 3-2x \ge 0 \\ 4(x^2-3x+2) \le (2x-3)^2 \end{cases} \quad 2x \le 3 \implies x \le 1$$

Sempre (come sopra)

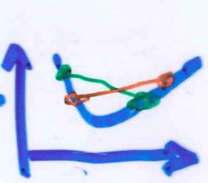
sì per $x \le 1$ $f(x) > 3-2x$
e quindi non ci sono intersez. con gli asintoti.

---

per lo studio completo manca:

1) monotonia in $[2,+\infty)$

2) concavità / convessità



$f:(a,b) \to \mathbb{R}$

$f(x)$ è convessa su (a,b) se $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$ il segmento P_1P_2 con $P_1 = (x_1, f(x_1))$, $P_2 = (x_2, f(x_2))$ sta al di sopra del grafico

Concava nel caso "al di sotto"

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

in generale se prendo $c \neq 0$

$f(x)$ è composta di

$F(x) = \frac{1}{x}$ che è cont. in $x = c \neq 0$

decr. in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$

e $G(t) = e^t$ che è cont. in ogni $x \in \mathbb{R}$ e in part. in $x = \frac{1}{c}$

crescente su $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ comp. è cont.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$$ CONTINUITA' da DS

NO

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = e^{-\infty} = 0 = f(0)$$ continua da SIN.

$y = 1$ asint. orizz.

La funz decresa su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$, per COMPOS.