FUNZIONI CONTINUE

(a, b eventualmente ∞)

$f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $c \in (a,b)$ se

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x \to c^+} f(x) \quad \text{cioè}$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Significa: A PICCOLE VARIAZIONI di x corrispondono PICCOLE VARIAZIONI di $f(x)$.

Si dice continua da sinistra in $c \in (a,b)$ se

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

Es. $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Idem da destra: $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice continua su $[a,b]$ (con a, b finiti)

se f è continua in ogni $c \in (a,b)$
continua da destra in a : $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
da sinistra in b : $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Tipi di discontinuità

0) ELIMINABILE. ES. $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

1) di prima specie o a salto (modellizzano fenomeni con bruschi salti. ES. $f(x) = [x]$

$\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$

2) di seconda specie. Es. $f(x) = \begin{cases} \sin 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

se $\lim_{x \to c^+} f(x)$ e/o $\lim_{x \to c^-} f(x)$ non esistono o sono uguali a $\pm\infty$ o $-\infty$

ESERCIZI: in dipendenza da $a \in \mathbb{R}$ si stabilisca se $f(x)$ è continua in ogni $x \in \mathbb{R}$ L10

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^4} & \text{se } x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{a+2}{a^2+1} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\operatorname{Ch} x} - x & \text{se } x < 0 \\[2ex] a & \text{se } x = 0 \\[2ex] \dfrac{3}{2x^2+3x+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \log(-x) & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ e^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} \log x}{1-x} & \text{se } 0 < x < 1 \\[2ex] ax - a^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} 2(x-1)}{x-1} & x < 1 \\[2ex] 2 & x = 1 \\[2ex] \dfrac{e^{x-1} - 1 + (x-1)^a}{\log x} & x > 1 \end{cases}$$

Proprietà delle funzioni continue

f, g continue in c $\Rightarrow$ $f \pm g$ continua in c
$f \cdot g$ " " "
f/g " " " se $g(c) \neq 0$

$\boxed{\frac{f}{g} \text{ non è def. in } c.}$

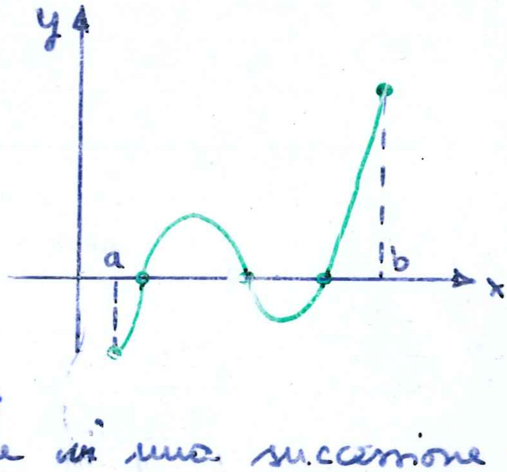
$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua in } c \\ g \text{ " " } f(c) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ continua in c.

Esempi di funzioni continue (a parte quelle elementari):

- polinomi
- razionali fratte ....
- $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ (con $f(x) > 0$)

Funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$

TEOREMA degli ZERI. Sia f continua in $[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$



Dim. CON IL METODO DI BISEZIONE Consiste nella costruzione di una successione $\{c_n\}$ di punti di (a,b) CONVERGENTE a UNO ZERO di f.

1°) $c_1 = \frac{a+b}{2}$. Se $f(c_1) = 0$ STOP;
altrimenti se $f(a)f(c_1) < 0$ pongo $a_1 = a$, $b_1 = c_1$
se $f(b)f(c_1) < 0$ " $a_1 = c_1$, $b_1 = b$

Riparto dall'intervallo $[a_1, b_1]$, per il quale valgono le ipotesi viste per $[a, b]$. Quindi

2°) $c_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$. Se $f(c_2)=0$ STOP;

altrimenti ITERO : $a_2 = \begin{cases} a_1 & \text{se } f(a_1)f(c_2)<0 \\ c_1 & \text{se } f(b_1)f(c_2)<0 \end{cases}$ $b_2 = \begin{cases} b_1 & \text{se } f(b_1)f(c_2)<0 \\ c_2 & \text{se } f(a_1)f(c_2)<0 \end{cases}$

Continuando così si ha una coppia di successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ t.c.

I) $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$: successioni MONOTONE

la prima ~~crescente~~ non decrescente superiormente limitata da b

la seconda ~~decrescente~~ non crescente inferiormente limitata da a

II) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

III) $f(a_n)\cdot f(b_n) < 0$. per costruzione) IV) f è una funz. continua in ogni punto di (a, b)

Da I) si deduce $\{a_n\} \to l_1$, $\{b_n\} \to l_2$ per $n \to \infty$

Da II) si deduce che $b_n - a_n \to 0 \Rightarrow l_1 = l_2 = l$

Da IV) " $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(l) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ PER DEF. di LIMITE

Da III) e dal teor. della permanenza del segno si deduce

Dettaglio a parte

$$f(a_n)\cdot f(b_n) \longrightarrow (f(l))^2 \leq 0$$ **VEDI L12.1**

.... cioè $f(l)=0$, cioè l è lo zero cercato.

Questo è un metodo di calcolo (approssimato) degli zeri : necessita però di una LOCALIZZAZIONE precisa degli zeri. Ed è un metodo lungo.

TEOR. DEGLI ESTREMI (Weierstrass). f continua su $[a, b] \Rightarrow$

i) f limitata su $[a. b]$

ii) f dotata di massimo e di minimo ASSOLUTI in $[a. b]$.

cioè ...

$\{a_n\} \to \ell \qquad \{b_n\} \to \ell$

$\{f(a_n)\} \qquad \{f(b_n)\}$

Continuità in $x = \ell$ significa

$$\lim_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$$

Cosa significa quel limite?

$\forall \{x_n\} \to \ell$ si ha $\{f(x_n)\} \to f(\ell)$

in part. se prendo $\{x_n\} = \{a_n\}$ oppure $\{x_n\} = \{b_n\}$ vedo che

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(\ell) = \lim_{n \to \infty} f(b_n)$$

—

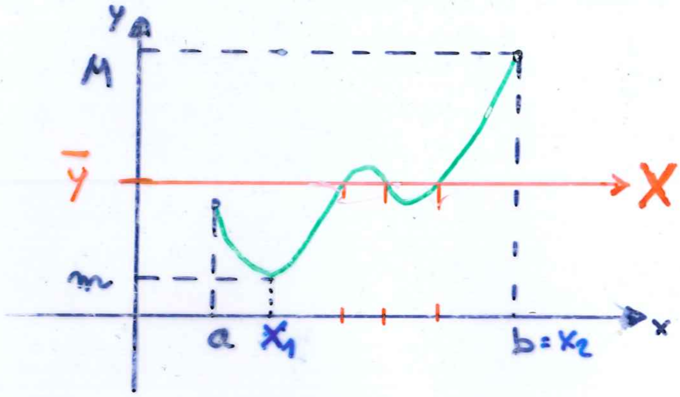
$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{f(a_n) \cdot f(b_n)}_{<0 \text{ per costruzione}} = f(\ell) \cdot f(\ell) = (f(\ell))^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ (contronominale del T PERM. SEGNO)

$(f(\ell))^2 \leq 0 \qquad \Rightarrow (f(\ell))^2 = 0$

TEOR. dei VALORI INTERMEDI. f continua in $[a,b]$

Per ogni valore $\bar{y}$ compreso tra il minimo m e il max M esiste un $\bar{x} \in [a,b]$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{y}$.



$\Rightarrow$ l'immagine di $[a,b]$ mediante f cont. in $[a,b]$ è l'interv $[m, M]$

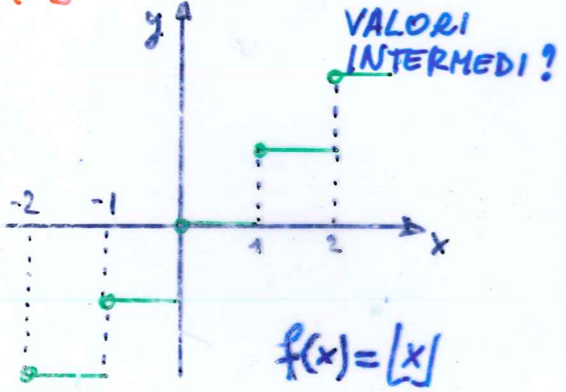
Infatti: se $g(x) = f(x) - \bar{y}$; $m - \bar{y} = g(x_1) < 0$; $M - \bar{y} = g(x_2) > 0$

$\Rightarrow g(x_1) g(x_2) < 0$; g è cont. in $[a,b]$ $\Rightarrow$ vale teor. degli zeri $\Rightarrow$

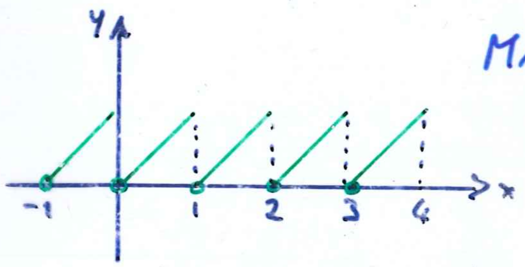
$\Rightarrow \exists$ $\bar{x} \in [a_1, b]$ t.c. $g(\bar{x}) = 0$ e quindi $f(\bar{x}) = \bar{y}$

Si utilizza per provare il TEOR della MEDIA INTEGRALE.

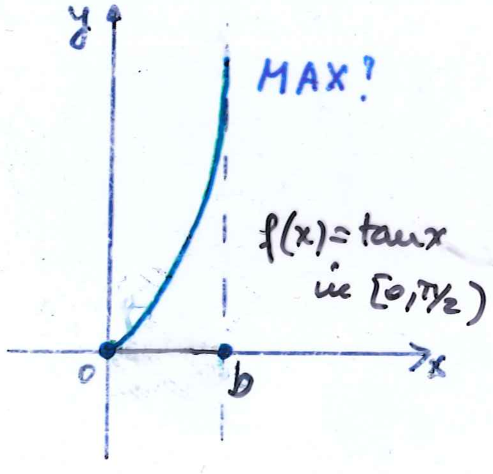
ATTENZIONE. Questi risultati non valgono in generale per funzioni non continue in almeno un punto di $[a,b]$



$f(x) = \lfloor x \rfloor$



$f(x) = x - \lfloor x \rfloor$



$f(x) = \tan x$ in $[0, \pi/2)$

Ma anche se cade qualche altra ipotesi:

es. $f(x) = x^2$ def. su $\mathbb{R}$ ....

Trovare gli zeri della funz.

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

Devo appl. il teor degli zeri

$\boxed{\text{vedere se posso}}$

$f(x)$ continua su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ su ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

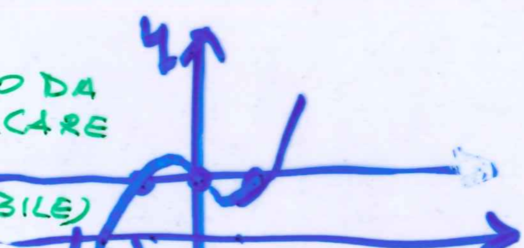
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ per $x < h \in \mathbb{R}$ opportuno $f(x) < 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ per $x > k \in \mathbb{R}$ opp. $f(x) > 0$

$\Rightarrow$ $f(h)f(k) < 0$ si può applicare.

$f(0) = 1 = f(1) = f(-1)$

GRAFICO DA VERIFICARE (MA PLAUSIBILE)



$f(-2) = -8 + 2 + 1 < 0$

$f(-1) = 1 > 0$

$[a,b] = [-2,-1]$

$c_1 = -3/2$

$f(-3/2) = -\frac{27}{8} + \frac{3}{2} + 1 = -3 - \frac{3}{8} + 1 + \frac{1}{2} + 1 < 0$

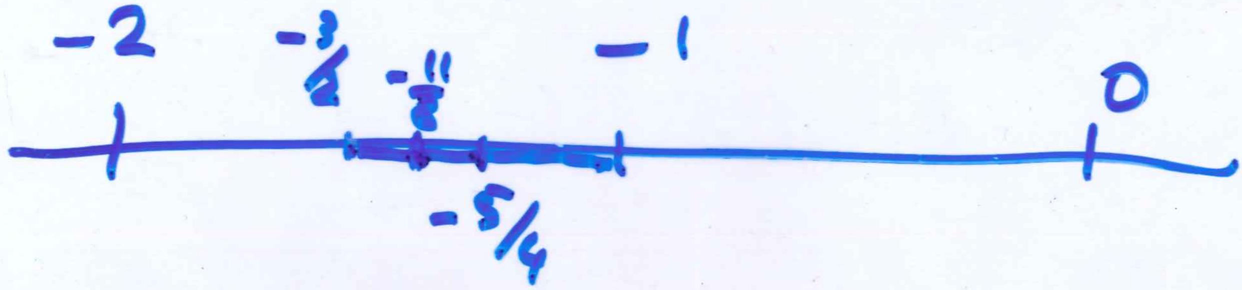
$[a_1, b_1] = [-3/2, -1]$

$c_2 = -\frac{5}{4}$

$f(-5/4) = -\frac{125}{64} + \frac{5}{4} + 1 > 0$

$[a_2, b_2] = [-3/2, -5/4]$ $\quad c_3 = -\frac{11}{8}$

$f\left(-\frac{11}{8}\right) = -\frac{121 \cdot 11}{64 \cdot 8} + \frac{11}{8} + 1$



ecc.

Dovrei prima studiare la monotonia di $f(x)$. Se il grafico è quello annunciato a pag. L13.1 ha senso studiare solo questo zero.