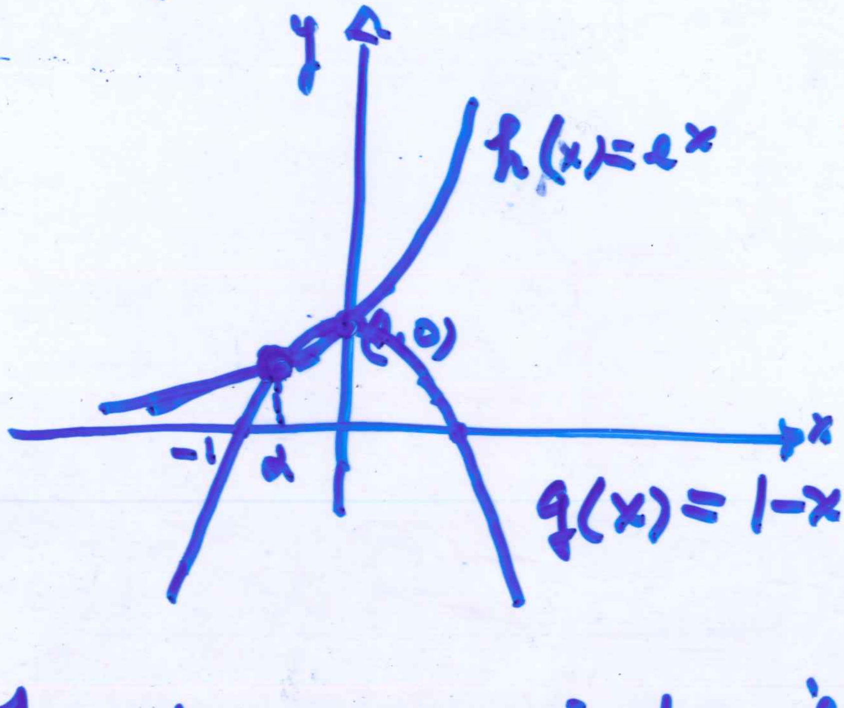
Stabilire se è continua in $x=0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ \dfrac{\ln(1+|x|)}{e^x - 1 + x^2} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Dove è definita $f(x)$?

Dove è nullo il denominatore a parte $x=0$?



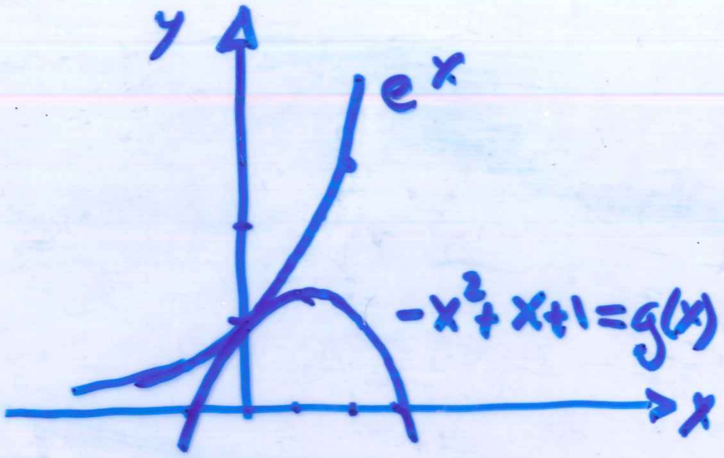
$e^x = 1-x^2$

in $x=\alpha$ con $-1<\alpha<0$

$\Rightarrow f(x)$ non è def in $x=\alpha$

Ma siamo sicuri che il grafico sia fatto bene, cioè che la seconda intersez. ci sia?

Se avessi $e^x = 1+x-x^2$ troverei una seconda intersezione? La funz $g(x)=1+x-x^2$ ha in $(0,1)$ tangente uguale a quella di e^x.



$\Rightarrow$ 1 sola intersezione!

la $g(x)$ è concava e vedremo che questo implica star "sotto" la tangente, mentre e^x (convessa) sta sopra.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+|x|)}{e^x-1+x^2} =$$

$|x|\to 0$

$\ln(1+|x|)\sim|x|$

$e^x-1=x+o(x)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x+o(x)+x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sgn} x}{1+o(1)+x} =$$

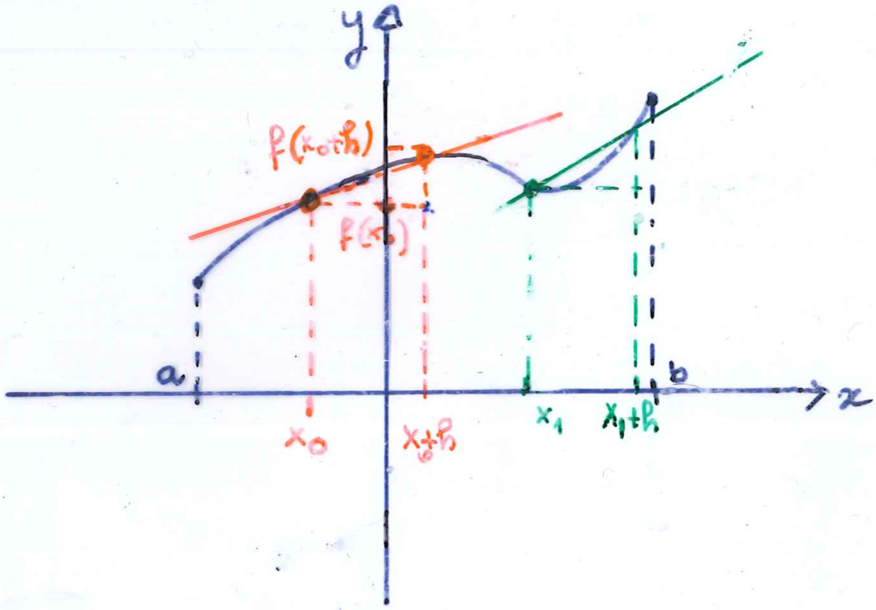
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sgn} x}{1} = \begin{cases} 1 & \text{se } x\to 0^+ \\ -1 & \text{se } x\to 0^- \end{cases}$$

Visto che $f(0)=1$ è continua da destra in $x=0$ ma non da sinistra e quindi non è continua in $x=0$.

DERIVATA di una funz. $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$

Problema della VARIAZIONE della variabile dipendente in relazione alla variazione della variabile indipendente



$y = f(x)$

TASSO DI VARIAZIONE MEDIA di $f(x)$ rispetto a x:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Viene anche detto RAPPORTO INCREMENTALE

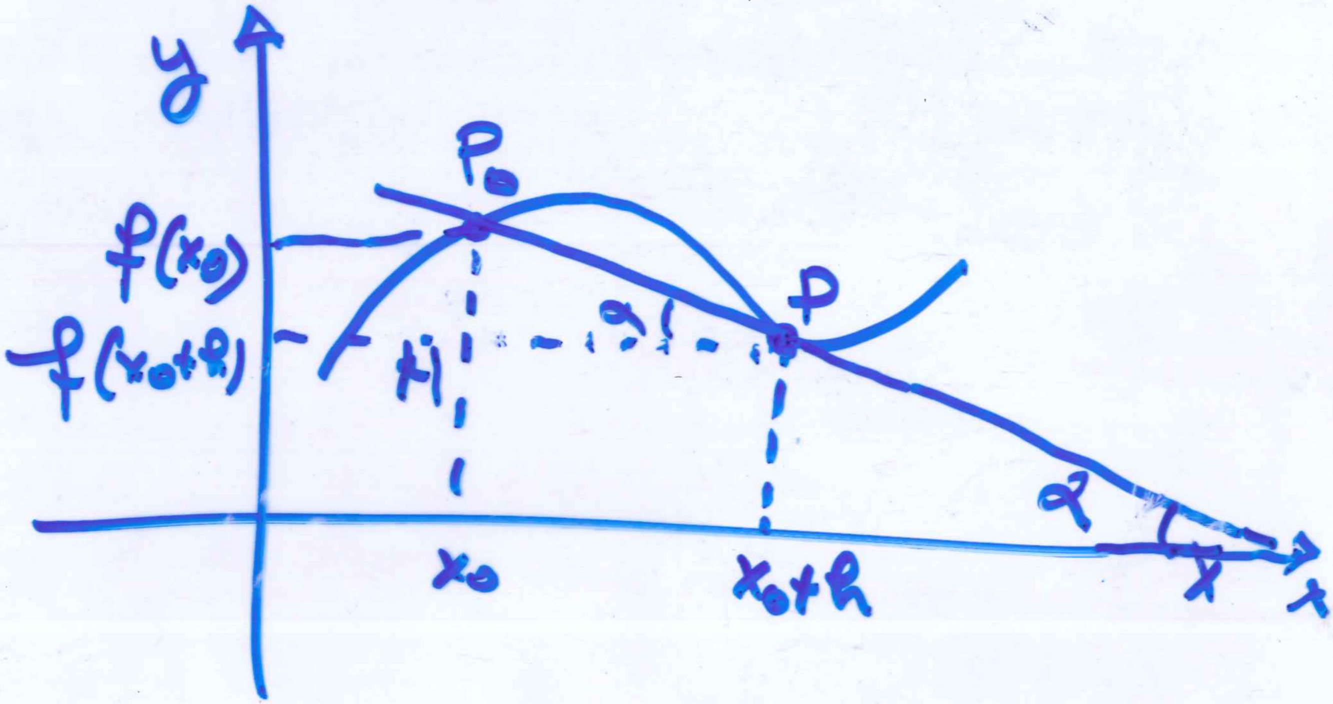
GEOMETRICAMENTE è il coefficiente angolare della retta congiungente $(x_0, f(x_0))$ con $(x_0+h, f(x_0+h))$

VEDI D1.1

Quando h diventa molto piccolo, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ PUÒ RAPPRESENTARE molto bene la pendenza del grafico di $f(x)$ in prossimità di $(x_0, f(x_0))$. PRECISANDO:

se esiste ed è finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ si dice che f è derivabile in x_0 e il limite viene detto derivata di f in x_0 e denotato con $f'(x_0)$.

Descriz. geom. del rapp. incrim.



m = coeff. ang. della retta per P_0 e P:

$m = \operatorname{tg}\alpha$ $\quad PP_0H$ è triang. rett. $\Rightarrow$

$$= \frac{\overrightarrow{HP_0}}{\overrightarrow{PH}} = \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{x_0 - (x_0+h)} =$$

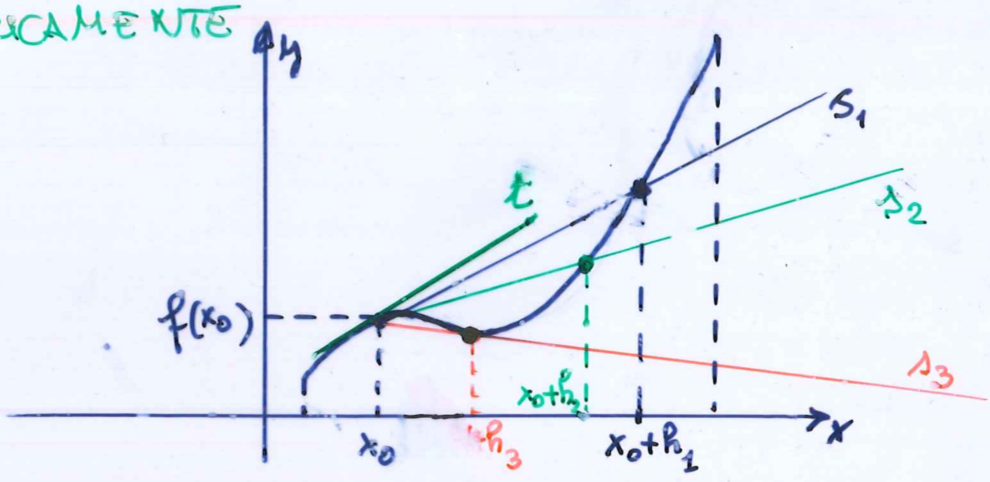
$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

<u>oppure</u> considero l'eq. della retta per P_0 $\quad y - f(x_0) = m\,(x - x_0)$

che passa per P: $\quad f(x_0+h) - f(x_0) =$

$m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \Leftarrow \quad = m\,(x_0+h - x_0)$

GEOMETRICAMENTE



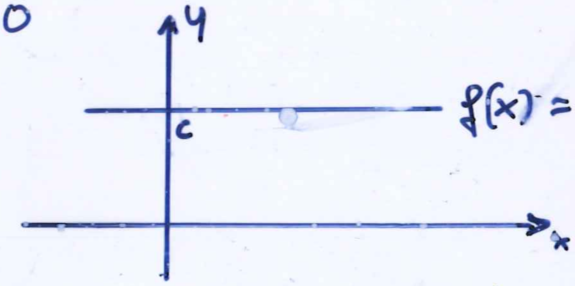
la derivata rappresenta il coefficiente angolare della retta t "TANGENTE" in $(x_0, f(x_0))$ al grafico di $f(x)$

limite delle secanti passanti per $(x_0, f(x_0))$ e per un altro punto del grafico: sua equazione? VEDI D2.1

ESEMPI.

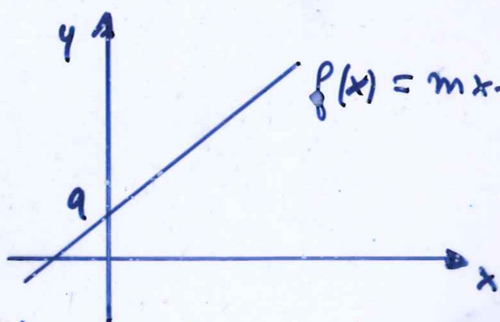
1. $f(x) = c$ ove $c \in \mathbb{R}$ è derivabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f'(x_0) = 0$

$f(x_0+h) = c$
$f(x_0) = c$ $\Longrightarrow \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0$



2. $f(x) = mx + q$ $(m, q \in \mathbb{R})$ è derivabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f'(x_0) = m$

$f(x_0+h) = m(x_0+h)+q$
$f(x_0) = mx_0+q$ $\Longrightarrow \frac{mh}{h} = m$



3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ è derivabile in ogni $x_0 \neq 0$, MA NON in $x_0 = 0$ poiché:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty$$ poiché $\frac{h^{1/3}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}}$

Eq. della retta tangente al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$

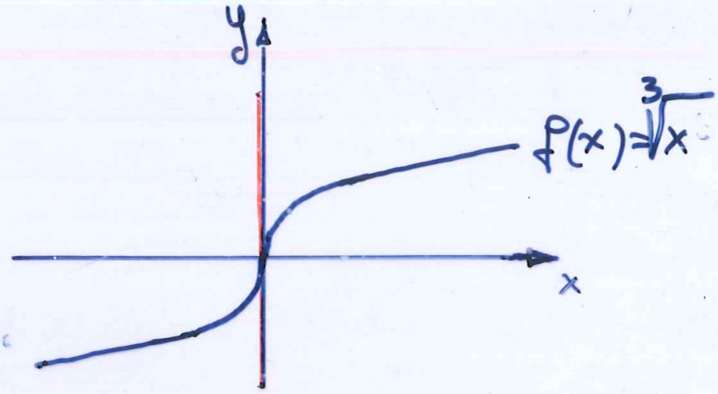
$$y - f(x_0) = m\,(x - x_0)$$

$\to$ m è il limite del rapporto incrementale $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ al tendere di h a 0 cioè $m = f'(\underline{x_0})$

$$\Rightarrow \boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)} \quad (*)$$

numero numero

Come trovo l'eq. della retta tg.:
calcolo il val. della funz. in x_0
calcolo il val. della derivata in x_0
sostituisco in $(*)$

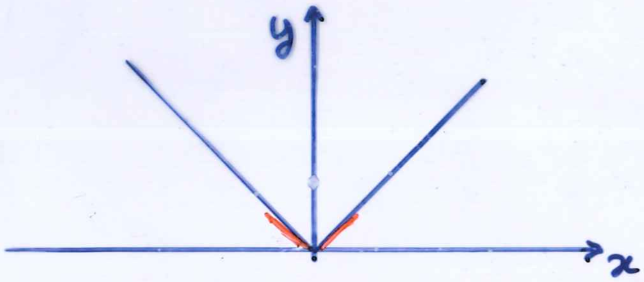


ATTENZIONE: in $(0,0)$ esiste comunque la tangente al grafico: $x=0$

4. $f(x) = |x|$ è derivabile in ogni $x_0 \neq 0$, MA NON in $x_0=0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h>0 \\ -1 & \text{se } h<0 \end{cases}$$

non esiste poiché è $\neq$ da DS e da SIN



Derivata destra di $f(x)$ in x_0: esiste se esiste finito

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad : \quad f'_+(x_0)$$

Idem: derivata sinistra

Quindi $|x|$ ha in $x_0=0$ derivata destra e sinistra $\Big\}$ DIVERSE

Se una funz. è derivabile in x_0, $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

Parlo di punti angolosi.

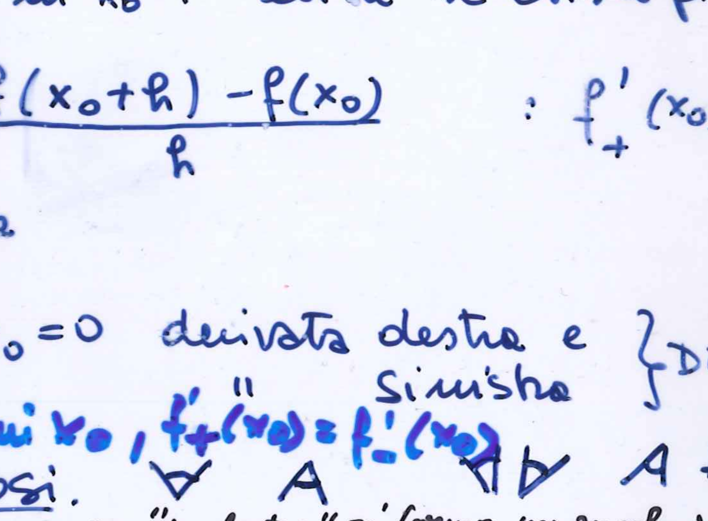
Tra la "tangente da sinistra" e quella "da destra" si forma un angolo $\alpha \in (0,\pi)$

Invece cuspidi se $\displaystyle\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$

(oppure $\mp\infty$). ESEMPIO

L'angolo tra le 2 tang. è 0

$f(x) = \sqrt{|x|}$



$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|h|}-\sqrt{0}}{h} = \pm\infty$$

$\hookrightarrow \dfrac{\sqrt{|h|}}{|h| \text{ segno}}$

tra le 2 tangenti l'angolo misura 0.

REGOLE di CALCOLO

Ingredienti : 1. DERIVATE di FUNZIONI ELEMENTARI
2. TEOREMI di DERIVAZIONE

1. DERIVATE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

Denotando con $Df(x)$ la derivata di $f(x)$ si ha:

- $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ (qualunque sia l'esponente α, in ogni x interno all'I.D. della funzione potenza in esame)
  (vedi D4.2)
- $De^x = e^x$ (D4.1)
- $D\ln x = \frac{1}{x}$ (D4.1)
- $D\,\mathrm{sen}\,x = \cos x$
- $D\cos x = -\mathrm{sen}\,x.$

Caso particolare : $D(\sqrt{x}) = D(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
altro esempio a pag D4.3

2. TEOREMI di DERIVAZIONE

Siano f, g definite in (a,b) a valori in $\mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$
Se f e g sono derivabili in x_0 si ha

- $D(f \pm g)(x_0) = Df(x_0) \pm Dg(x_0)$
- $D(f \cdot g)(x_0) = Df(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot Dg(x_0)$ (*)

Caso particolare : se $g(x) = c$: $c'(x) = 0$
$D(cf)(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
e quindi : * $D(\log_a x) = D(\log_a e \cdot \ln x) = \log_a e \cdot \frac{1}{x}$
* derivata di un polinomio ...
vedi pag D4.4

(*) Se si pensa che possa valere la formula, $D(f \cdot g) = Df \cdot Dg$, provare a derivare $x \cdot 1$

Derivata in $x = x_0$ di

$f(x) = e^x$:

$f(x_0+h) = e^{x_0+h}$

$f(x_0) = e^{x_0}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h} =$$

$$= e^{x_0} \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{1} = e^{x_0}$$

Derivata in $x_0 \in (0, +\infty)$ di $\ln x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) =$$

$$= \lim \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

Derivata in x_0 di $f(x) = x^\alpha$ D4.2
($x_0 \in (0,+\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^\alpha - x_0^\alpha}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^\alpha \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^\alpha - x_0^\alpha}{h} =$$

$$= x_0^\alpha \lim_{h \to 0} \frac{\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^\alpha - 1}{h} =$$

$$= x_0^\alpha \lim_{h \to 0} \frac{\alpha \cdot \frac{\cancel{h}}{x_0}}{\cancel{h}} =$$

$$= x_0^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x_0} = \alpha\, x_0^{\alpha - 1}$$

se $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ ($\setminus \{0\}$ se $\alpha < 0$)

$\alpha \in \mathbb{N}$: $(x_0+h)^n = x_0^n \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^n = x_0^n \left(1 + \frac{nh}{x_0} + o(h)\right)$

se $n < 0$ aggiustare i conti....

D4.3

Calcolare l'eq. della retta tangente al grafico di $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ in $x_0 = 8$

$f'(x_0) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x_0}}$, $x_0=8$

$f'(8) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$f(8) = 4$

eq. tang: $y-4 = \frac{1}{3}(x-8)$

D4.4

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 3x - 1$$

$$f'(x_0) = 1 \cdot (x^4)'_{x=x_0} - 5(x^2)'_{x=x_0} + 3(x)'_{x=x} - 0$$

$$= 4x_0^3 - 10x_0 + 3$$

Considero $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e suppongo che $\forall x_0 \in (a,b)$ esista $f'(x_0)$. Posso associare a ogni $x_0 \in (a,b)$ la deriv. in x_0

$$x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

Questa corrispondenza è una funzione

$$f' : (a,b) \to \mathbb{R}$$

che chiamo <u>derivata prima di f</u>

[Questo giustifica il fatto che ogni tanto scrivo $f'(x)$ invece di $f'(x_0)$.]

TEOREMA di DERIVAZIONE delle FUNZIONI COMPOSTE

Siano $f: (a,b) \to B \subseteq \mathbb{R}$ e $g: (c,d) \to \mathbb{R}$ con $B \subseteq (c,d)$

a, b, c, d eventualmente infiniti

due funzioni tali che

f sia derivabile in $x_0 \in (a,b)$

g " " in $f(x_0) \in B \subseteq (c,d)$

Allora $g \circ f(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0 e

$$(*) \qquad \boxed{D(g \circ f)(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

composizione   prodotto

Per ricordarselo provare a scrivere così:

$y = f(x)$ e rappresento $f'(x)$ come $\frac{dy}{dx}$

$z = g(y)$ " $g'(y)$ come $\frac{dz}{dy}$

mentre rappresento $D(g \circ f)$ come $\frac{dz}{dx}$

Allora $(*)$ si rilegge: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

ESEMPI

- Considero $g(y) = \frac{1}{y}$: $\forall y \neq 0$ $g'(y) = -\frac{1}{y^2}$

  Allora $D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = D(g \circ f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\dfrac{f'(x)}{(f(x))^2}$

  in tutti gli x tali che $f(x) \neq 0$.

- Conseguenza: FORMULA di DERIVAZIONE del RAPPORTO:

  se $g(x_0) \neq 0$

  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

  Infatti: $\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(\frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\right)$

- • In particolare $(\tan x)' = \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = 1 + (\tan x)^2 = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$

• Sia f derivabile in x_0 e $a \in \mathbb{R}$. La funzione $f(ax)$ nasce dalla composizione

$$x \xrightarrow{a\cdot(\ )} ax \xrightarrow{f} f(ax)$$

Dunque

$$D(f(ax)) = a f'(ax)$$

vedi es. p. D6.1

Casi particolari:

• $D(e^{ax}) = a \cdot e^{ax}$ $\qquad \Rightarrow (e^{-x})' = -e^{-x}$

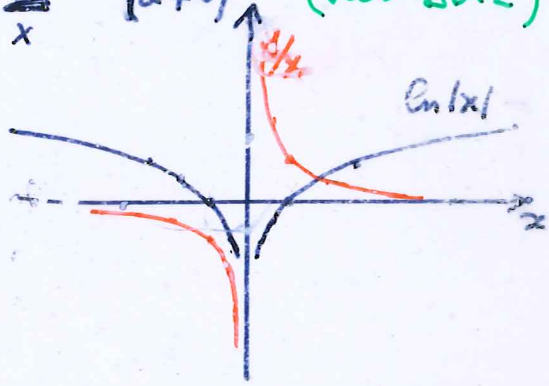
e quindi

$$D(c^x) = D(e^{(\ln c)x}) = (\ln c)c^x$$

($c>1$ opp. $0<c<1$)

$$D(e^{-x}) = -e^{-x}$$

• $D(\ln ax) = a \cdot \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$ $\quad (a \neq 0)$ $\quad$ (vedi D6.2)



e quindi

$$D(\ln(-x)) = \frac{1}{x}$$

e complessivamente

$$\rightarrow \quad D(\ln|x|) = \frac{1}{x} \quad \leftarrow$$

... tenerlo presente quando cercheremo una funzione la cui derivata sia $\frac{1}{x}$.

Osservazione: derivando una funzione pari si ha una funzione dispari (e viceversa).

Esercizi. Calcolare le derivate di

1. $\ln x - 5x^3 + 4\cos x$
2. $\frac{1}{2}x^2 + 2^x + 3$
3. $(\log_{10} x)^2$
4. $\operatorname{sen} x \cos x$
5. $\sqrt{1-2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$
6. x^x
7. $(1-x)^{2x}$

$(\text{sen}\, 2x)'$

$x \overset{2(\,)}{\longmapsto} 2x \overset{\text{sen}}{\longmapsto} \text{sen}\, 2x$

$(\text{sen}\, 2x)' = (2x)' \cdot (\sin y)'_{y=2x} =$ → derivo rispetto a y

$= 2 (\cos y)_{y=2x} =$

$= \boxed{2 \cos 2x}$

$f(x) = e^{ax}$

$x \overset{a(\,)}{\longmapsto} ax \overset{e^{(\,)}}{\longmapsto} e^{ax}$

$f'(x) = (ax)' \cdot (e^y)'_{y=ax} =$ → derivo rispetto a y

$= a \cdot e^{ax}$

$f(x) = a^x = e^{x \ln a} \quad a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$

$f'(x) = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$

$$f(x) = \ln(-x) \quad \text{Ins.}\ (-\infty, 0)$$

$$x \xmapsto{-(\,)} -x \xmapsto{\ln} \ln(-x)$$

$$f'(x) = (-x)' \cdot (\ln y)'_{y=-x} =$$

$$= (-1) \cdot \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$$

più in generale

$$f(x) = \ln(ax)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

oppure

se $a>0,\ x>0$ $\quad f(x) = \ln a + \ln x$

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{x}$$

se $a<0,\ x<0$ $\quad f(x) = \ln(-a) + \ln(-x)$

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{x}$$

Calcolare $(\ln(|x|))'$

Qualche derivata:

$D(x^2 \operatorname{tg} \sqrt{x})$

$D(x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1})$

$D \ln(f(x))$

$$D \log(2e^x+3) = \frac{1}{2e^x+3} \cdot 2e^x$$

$$D \sqrt{2x^2+x+3} = \frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x+3}}$$

$$D \frac{\sqrt{x}}{\log x + x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\log x + x) - \sqrt{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)}{(\log x + x)^2} =$$

$$= \frac{\log x + x - 2x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{2\sqrt{x}\,(\quad)^2} = \frac{\log x - x - 2}{2\sqrt{x}\,(\quad)^2}$$

$$D \frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} = \frac{\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} g(x) - g'(x)\sqrt{f(x)}}{g(x)^2} =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - 2g'(x)f(x)}{2\sqrt{f(x)}\, g(x)^2}$$

$$D \frac{f(x)^\alpha}{g(x)} = \frac{\alpha f(x)^{\alpha-1} f'(x) g(x) - f(x)^\alpha g'(x)}{g^2(x)} =$$

$$= f(x)^{\alpha-1} \frac{\alpha f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$$

$$D \frac{f(x)^\alpha}{g(x)^\beta} = f(x)^{\alpha-1} g(x)^{\beta-1} \frac{\alpha f' g - \beta f g'}{g^{2\beta}} = \frac{f^{\alpha-1}}{g^{\beta+1}}(\alpha f' g - \beta f g')$$

$$D\left(\log\sqrt{x^2-3x} + 2^{x^2}\right) = D\left(\frac{1}{2}\log(x^2-3x) + 2^{x^2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{2x-3}{x^2-3x} + 2x \cdot 2^{x^2} \cdot \log 2$$

$$D \log_2 x = D \log_2 e \log_e x = \frac{\log_2 e}{x}$$