- Sia f derivabile in x_0 e $a \in \mathbb{R}$. La funzione $f(ax)$ nasce dalla composizione

$$x \xrightarrow{a\cdot(\ )} ax \xrightarrow{f} f(ax)$$

Dunque

$$D(f(ax)) = a f'(ax)$$ vedi es. p. D6.1

Casi particolari:

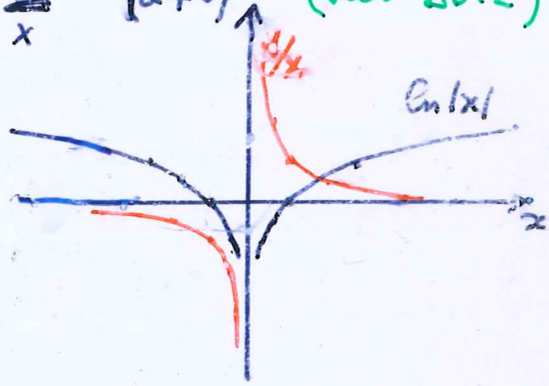
- $D(e^{ax}) = a \cdot e^{ax}$ $\Rightarrow (e^{-x})' = -e^{-x}$

e quindi

$$D(c^x) = D(e^{(\ln c)x}) = (\ln c)c^x$$ $(c>1$ opp. $0<c<1)$

$$D(e^{-x}) = -e^{-x}$$

- $D(\ln ax) = a \cdot \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$ $(a \neq 0)$ (vedi D6.2)



e quindi

$$D(\ln(-x)) = \frac{1}{x}$$

e complessivamente

$$\rightarrow D(\ln|x|) = \frac{1}{x} \leftarrow$$

... tenerlo presente quando cercheremo una funzione la cui derivata sia $\frac{1}{x}$.

Osservazione: derivando una funzione pari si ha una funzione dispari (e viceversa). VEDI pag D6.1 – D6.2

Esercizi. Calcolare le derivate di

1. $\ln x - 5x^3 + 4\cos x$
2. $\frac{1}{2}x^2 + 2^x + 3$
3. $(\log_{10} x)^2$
4. $\operatorname{sen} x \cos x$
5. $\sqrt{1-2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$
6. x^x
7. $(1-x)^{2x}$

VEDI pag D6.2 – D6.4

È sempre vero che la funz. derivata di una funz. pari è dispari (e quella di una dispari è pari)?

Sì per il teor. di derivaz. delle funz. composte.

f: insieme simmetrico rispt. all'origine $I \longrightarrow \mathbb{R}$

f sia derivabile in I

Prendo $f(-x)$. Chi è la sua derivata?

$$x \xrightarrow{-(\,)} -x \xrightarrow{f} (f(-x))$$

$$D(f(-x)) = -1 \cdot f'(-x)$$

Sia f pari : $f(-x) = f(x)$

derivo : $-f'(-x) = f'(x) \Rightarrow$

$f'(-x) = -f'(x)$:

f' dispari

Sia f dispari : $f(-x) = -f(x)$

derivo : $-f'(-x) = -f'(x)$

$$f'(-x) = f'(x)$$

f' pari

Esercizi

1. $(\ln x - 5x^3 + 4\cos x)' =$

$= 1(\ln x)' - 5(x^3)' + 4(\cos x)' =$

$= \frac{1}{x} - 15x^2 - 4\,\mathrm{sen}\,x$

2. $\left(\frac{1}{2}x^2 + 2^x + 3\right)' =$

$= \frac{1}{2}\cdot 2x + \left(e^{x\ln 2}\right)' + 0 =$

$= x + (\ln 2)\,e^{x\ln 2} = x + (\ln 2)\,2^x$

3. $\left[(\log_{10} x)^2\right]' = \underbrace{\boxed{2\log_{10} x}}_{}^{(y^2)'_{y=\log_{10}x}} \cdot (\log_{10} x)' =$

$= 2\log_{10} x \cdot \log_{10} e\,(\ln x)' = \frac{2\log_{10} e\cdot\log_{10} x}{x}$

4. $(\operatorname{sen} x \cdot \cos x)' =$

$= (\operatorname{sen} x)' \cos x + \operatorname{sen} x (\cos x)' =$

$= \cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x) =$

$= (\cos x)^2 - (\operatorname{sen} x)^2 = \cos 2x$

oppure $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$

$\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2x = \cos 2x$

---

5. $\left(\sqrt{1-2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)' =$

$= \Big((\underbrace{1-2x^2}_{y^{1/2}})^{1/2} + \frac{1}{2} (\underbrace{1-x}_{z^{-1/2}})^{-1/2} \Big)' =$

$= (1-2x^2)' \frac{1}{2} (1-2x^2)^{-1/2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (1-x)^{-3/2} (1-x)'$

$= \frac{-4x}{2} (1-2x^2)^{-1/2} + \frac{1}{4} (1-x)^{-3/2} =$

$= \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{(1-x)^3}}$

$$(x^x)' = (e^{x\ln x})'$$

$$x \xmapsto{f} x\ln x \xrightarrow{e^{(\,)}=y} e^{x\ln x}$$

$$f'(x)\cdot (e^y)'_{y=x\ln x} = f'(x)e^{x\ln x} =$$

$$= f'(x)\cdot x^x =$$

$$= \left(1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x}\right) x^x =$$

$$= (\ln x + 1)\, x^x$$

dove si annulla?

$x^x > 0 \Rightarrow$ si annulla se e solo se $\ln x = -1$ cioè per $x = e^{-1}$

---

7. $$\left((1-x)^{2x}\right)' = \left(e^{2x\ln(1-x)}\right)' \quad D: (-\infty, 1)$$

$$= (1-x)^{2x}\left(2x\ln(1-x)\right)' =$$

$$= 2(1-x)^{2x}\left(\ln(1-x) + x\cdot \frac{(1-x)'}{1-x}\right) =$$

$$= 2(1-x)^{2x}\left(\ln(1-x) + \frac{x}{x-1}\right)$$

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA.

Sia $f: (a,b) \to B \subseteq \mathbb{R}$ (a, b eventualmente infiniti)
ed esista la funzione inversa: $f^{-1}: B \to (a,b)$.

Se
f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$

e
$\boxed{f'(x_0) \neq 0}$

allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e risulta

$$D(f^{-1})_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

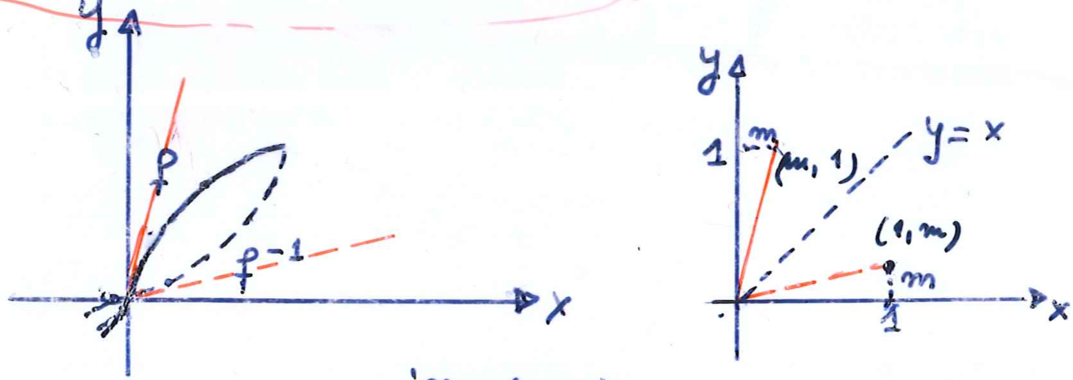


illustrazione con $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

Se $f'(x_0) = 0$ ....
vedi $y = x^3$ e la sua inversa $x = \sqrt[3]{y}$

ATTENZIONE: così formulato il teorema va bene per calcolare i singoli valori della derivata.
Se vogliamo la "funzione derivata di $f^{-1}(y)$" serve ricondurre a y la variabile che compare al 2° membro: $x_0 = f^{-1}(y_0)$

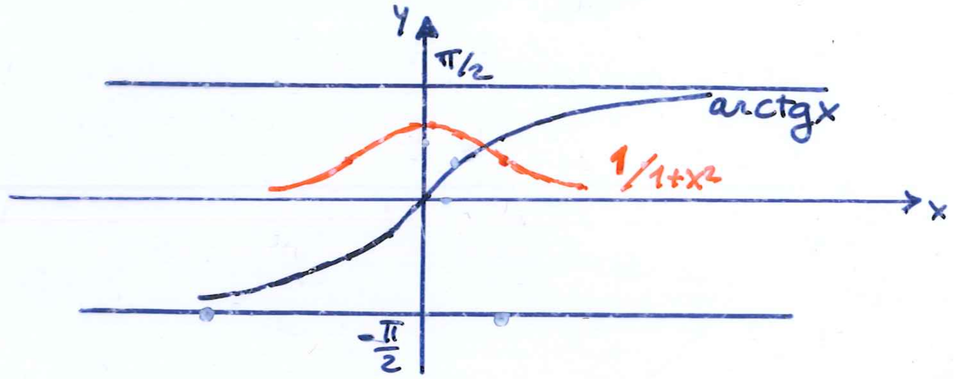
Esempio: $y = \operatorname{tg} x$ è invertita tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ da
$x = \operatorname{arctg} y$.

$$D \operatorname{arctg} y = \frac{1}{D \operatorname{tg} x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

funzione in x!

Riesprimendo anche la funzione inversa nella variabile x abbiamo

$$D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$



- Similmente

  sen: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ è invertita da arcsen, cioè

$y = f(x) = \operatorname{sen} x$ e $x = f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y$

$$\Rightarrow D \operatorname{arcsen} y = \frac{1}{D(\operatorname{sen} x)_{x=\operatorname{arcsen} y}} = \frac{1}{(\cos x)_{x=\operatorname{arcsen} y}} = ?$$

se $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-y^2}$

$\Rightarrow D \operatorname{arcsen} y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$: e $(\operatorname{arcsen} x)'$ è def. su $(-1,1)$

- Similmente

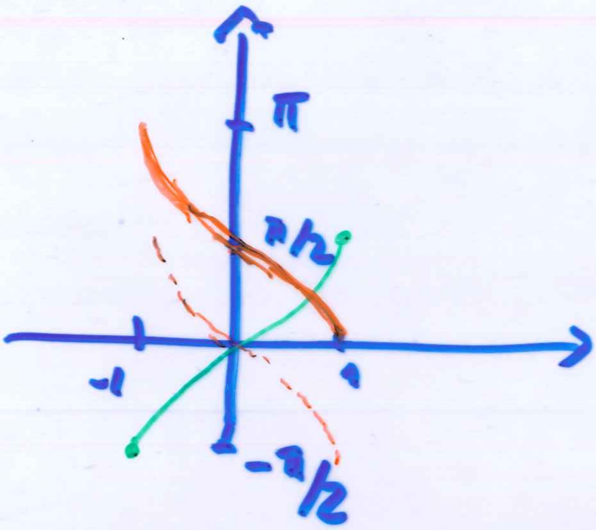
  cos: $[0,\pi] \to [-1,1]$ è invertita da arccos, cioè

$y = f(x) = \cos x$ e $x = f^{-1}(y) = \arccos y$

$$\Rightarrow D \arccos y = \frac{1}{D(\cos x)_{x=\arccos y}} = \frac{-1}{(\operatorname{sen} x)_{x=\arccos y}} = ?$$

se $x \in [0,\pi]$, $\operatorname{sen} x \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-y^2}$

$\Rightarrow D \arccos y = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$: e $(\arccos x)'$ è def su $(-1,1)$



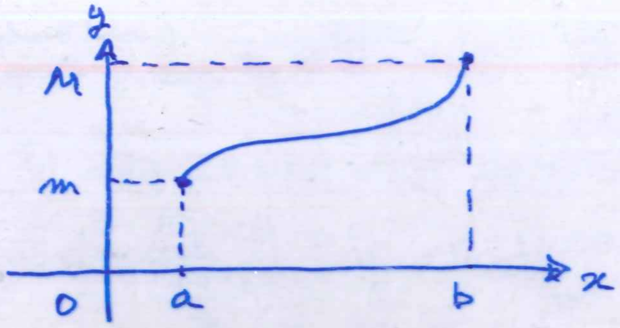
Perché
$(\arccos x)' = -(\arcsin x)'$?

Derivata di $\arcsin(1-2x) =$

$x \longmapsto 1-2x \xmapsto{\arcsin} \arcsin(1-2x)$

$-2 \cdot (\arcsin y)'_{y=1-2x} =$

$= -2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} < 0$



M è MAX assoluto, ma non ~~MAX~~ RELATIVO

m è min. assoluto, ma non min RELATIVO

Dico che M è MASSIMO ASSOLUTO per la funzione

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R},$$ insieme qualunque, eventualmente intervallo.

se esiste in A un punto x_0 tale che

$$f(x_0) = M$$

e per ogni $x \neq x_0$ in A risulta

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Cioè se M è MASSIMO per l'insieme immagine della funzione.

Similmente MINIMO ASSOLUTO .....

$$\dots \ f(x) \geq f(x_0)$$

Differenza con MAX e min RELATIVI ?

Dico che M è un MASSIMO RELATIVO per la funzione

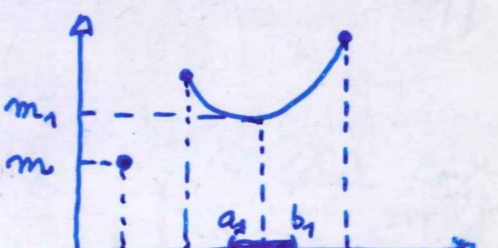
$$f: A \longrightarrow \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R}$$

se esiste un punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = M$ e <u>esiste un intervallo aperto</u> $(a_1, b_1) \subseteq A$ <u>che contiene</u> x_0 tale che $\forall\, x \in (a_1, b_1)$ si abbia

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Similmente MINIMO RELATIVO ....

$$\dots \ f(x) \geq f(x_0)$$

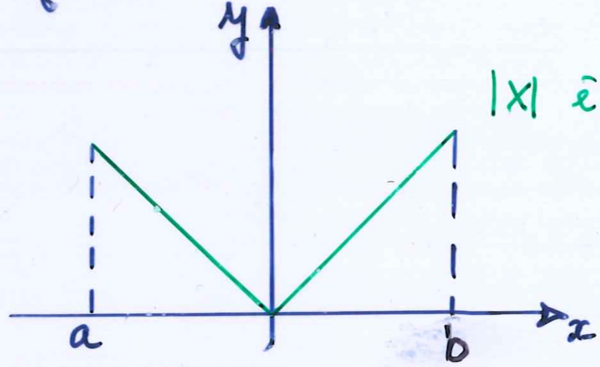


$f: \{c\} \cup (a,b) \to \mathbb{R}$; m = minimo ASS. non rel. ; m_1 min REL non min ASS.

DERIVATE E ....

- se $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ allora $f(x)$ è continua in x_0. VEDI PAG D9.1 - D9.2

il viceversa è falso



$|x|$ è continua in $x_0 = 0$

- Se $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ ha in $x_0 \in (a,b)$ un punto di massimo relativo ed è derivabile in x_0 allora

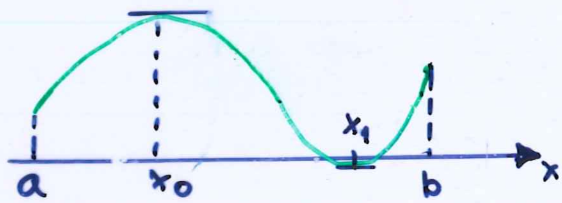
$$f'(x_0) = 0$$

Idem se x_1 è un punto di minimo relativo

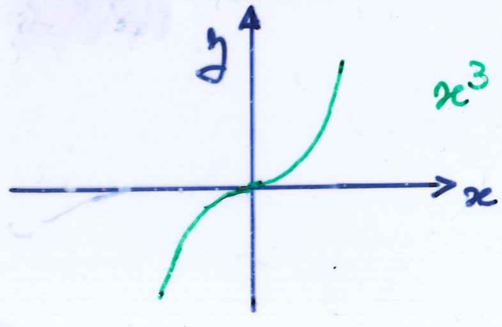
(Sul Testo : ESTREMI LOCALI)

TEOR. DI FERMAT

VEDI DIM PAG D9.3



ATTENZIONE: il viceversa è falso



x^3

$x_0 = 0$ è un punto a tangente stazionaria MA non estremo locale

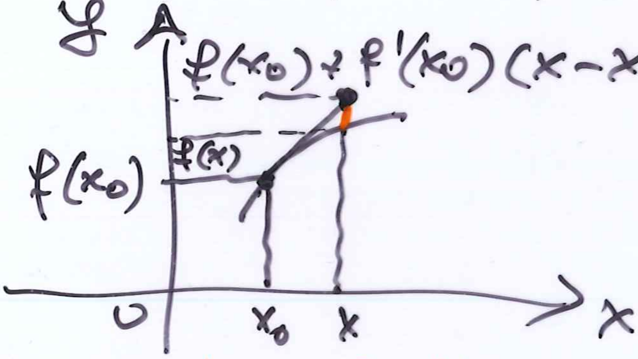
LEMMA FONDAMENTALE

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ e sia f derivabile in x_0. Allora posso approssimare il valore della funzione in un punto $x_0 + h \in (a,b)$ con h abbastanza piccolo ($h \to 0$) come segue

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$$

ATTENZIONE: se scrivo $x = x_0 + h$ e sostituisco trovo $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ è l'eq. della retta tang. in $(x_0, f(x_0))$ al grafico di f



per questo parlo di approssimazione LINEARE di $f(x)$ in prossimità di x_0.

$f'(x_0)\, h = df(x_0)$ differenziale in x_0

Se $f(x) = x$, $df = 1 \cdot h$
Si usa indicare direttamente questo differenziale con dx
$\Rightarrow dx = h$
Per tutte le f derivabili in x_0 scrivo $df(x_0) = f'(x_0)\, dx$
... vedi scrittura di $f'(x_0)$ come df/dx

Dim. Se f è derivabile in x_0, $\exists$ finito

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$\Updownarrow$ sommo $-f'(x_0)$

$$\left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right) - f'(x_0) = 0$$

D9.2)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0$$

$\Updownarrow$ la somma di 2 lim. è il lim. della somma

che, per confronto di infinitesimi, si traduce in:

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(h) \quad \text{per } h \to 0$$

Cioè:

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)} \quad \text{per } h \to 0$$

Questa approssimazione è fondamentale:

1) mi serve ora per provare la continuità delle funz. derivabili
2) è legata al concetto di DIFFERENZIALE (vedi pag D9)
3) è un primo esempio di approssimazione di TAYLOR
4) verrà generalizzata in 2 VARIABILI

Dimostro che se f è derivabile in x_0 è continua in x_0.

La tesi è $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Pongo $x - x_0 = h$:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) \underset{\text{LEMMA FOND.}}{=} \lim_{h \to 0} \left(f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h) \right)$$

$$= f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0)$$

DIM. del TEOR. DI FERMAT

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$. Per ipotesi $x_0 \in (a,b)$ è un punto di MASSIMO RELATIVO, cioè:

$\exists$ un intervallo $(c,d) \subseteq (a,b)$ e $(c,d) \ni x_0$ t.c. $\forall x \in (c,d)$

$$f(x) \le f(x_0).$$

Sempre per ipotesi f è derivabile in x_0 cioè esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Ma:

se $h \to 0^+$ $\quad \left.\begin{array}{l} f(x_0+h) \le f(x_0) \\ h > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta y}{h} \le 0$

se $h \to 0^-$ $\quad \left.\begin{array}{l} f(x_0+h) \le f(x_0) \\ h < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta y}{h} \ge 0$

$\lim_{h \to 0^+} \frac{\Delta y}{h} \le 0$ per la controcominale del TEOR. della PERM. del SEGNO

$\lim_{h \to 0^-} \frac{\Delta y}{h} \ge 0$ "

Dato che esiste $f'(x_0)$, deve essere

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\Delta y}{h}$$

$$\Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

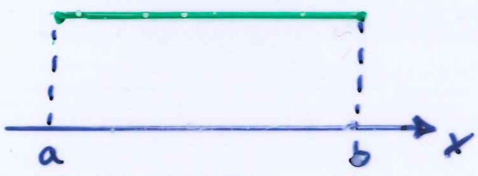
c. v. d.

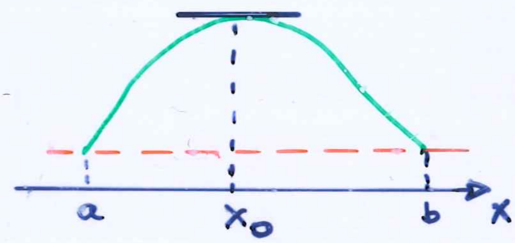
Però

- TEOR. di ROLLE: se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e $f(a) = f(b)$, sicuramente esiste in (a,b) ALMENO un punto x_0 t.c.

$$f'(x_0) = 0$$

VEDI dim. PAG. D10.1

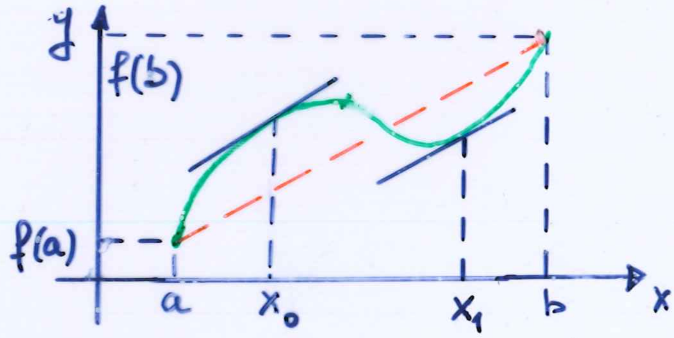




Più in generale

- TEOREMA di LAGRANGE: se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) sicuramente esiste in (a,b) ALMENO un punto x_0 t.c.

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



Vedi dim. PAG D10.1

Provare con $f(x) = x^2$ o $f(x) = \frac{1}{x}$

Se ne deduce il test di monotonia e il metodo per la ricerca di massimi e minimi locali.

DIM. TEOR. ROLLE.

f cont. in $[a,b]$ $\xRightarrow{\text{Weierstrass}}$ in $[a,b]$ ci sono
- un punto di MAX assoluto
- un punto di min assoluto.

1° caso

Questi due punti cadono negli estremi dell'intervallo; ad es. $f(a)=M$ e $f(b)=m$. Allora per definizione

$$\forall x \in (a,b): \quad f(b) \le f(x) \le f(a)$$

ma per ipotesi $f(b)=f(a) \implies f(x)=f(a)$ COSTANTE

$\implies f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b)$

VA BENE QUALUNQUE x_0 dell'intervallo.

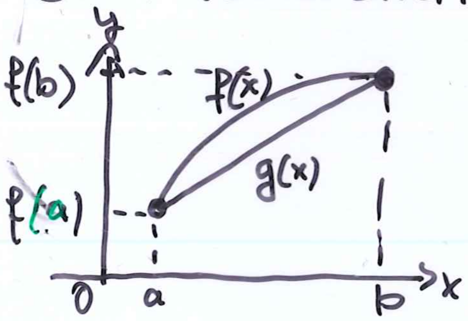
2° caso

Almeno uno tra punto di MAX e punto di min. cade INTERNAMENTE ad (a,b).
Sia ad es. $x_0 \in (a,b)$ il punto di MAX assoluto $\implies$ esiste tutto un intervallo $(c,d) \subseteq (a,b)$ e con $x_0 \in (c,d)$

$\implies x_0$ è punto di MAX RELATIVO

$\implies$ per il TEOR di FERMAT: $f'(x_0)=0$ c.v.d.

DIM. TEOR. LAGRANGE



la funzione che ha per grafico la retta per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ è

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Essa è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) e per costruzione $g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$.

$\implies f(x)-g(x)$

1. è continua in $[a,b]$ perché differenza di funz. cont.
2. è derivabile in (a,b) " " " funz. der.
3. $f(a)-g(a) = 0 = f(b)-g(b)$

Cioè soddisfa le ipotesi del teor. di Rolle $\implies$

$\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0)-g'(x_0)=0 \implies$

$$f'(x_0) = g'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ c.v.d.