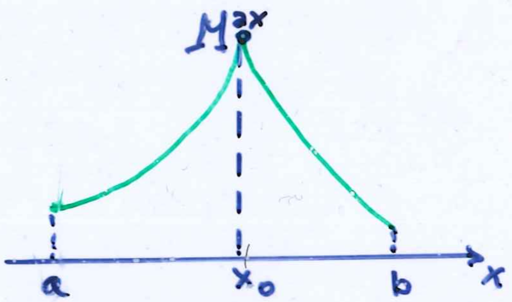
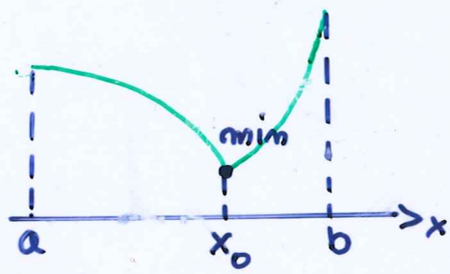
Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

- Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è crescente in (a,b) (*)
- Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è decrescente in (a,b)
- Se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è costante in (a,b)

$\Downarrow$

- Se $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x > x_0$ in x_0 c'è un MASSIMO RELATIVO
- Se $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$ in x_0 c'è un MINIMO RELATIVO





Altra conseguenza, sulle primitive
(dico che $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ se $F(x)$ è definita sullo stesso intervallo su cui dove lo è $f(x)$ e $F'(x) = f(x)$).

Se $F(x)$ e $G(x)$ sono primitive di una stessa funzione su uno stesso intervallo $[a,b]$ $f(x)$, esse differiscono per una costante.

Infatti $(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$

$\Rightarrow (F-G)(x) = c \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + G(x)$.

(*) Dim. $\forall s,t$ con $a<s<t<b$ si ha che

f è continua in $[s,t]$, derivabile in $(s,t) \Rightarrow$

$\exists x_0 \in (s,t)$ t.c. $\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s} = f'(x_0)$

Se $t>s$, visto che $f'(x_0)>0$, anche $f(t) > f(s)$

Conseguenze del Teor di Lagrange

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ cont. in $[a,b]$
deriv. in (a,b)

Hp $f'(x) \overset{=}{\underset{<}{\geq}} 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Ts $f(x)$ crescente (costante / decrescente) in (a,b) cioè

$\boxed{\forall x_1, x_2 \in (a,b) \quad \text{se } x_1 < x_2}$
allora $f(x_1) \overset{=}{<} f(x_2)$
$f(x_1) > f(x_2)$

Dim. L'intervallo $[x_1, x_2]$ è contenuto in $[a,b]$ $\Rightarrow$ su $[x_1, x_2]$ valgono le HP di Lagrange.

$\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

per HP $f'(c) \overset{=}{\underset{<}{\geq}} 0$ e per costruz. $x_2 - x_1 > 0$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) \overset{=}{\underset{<}{\geq}} 0$

$\Rightarrow f(x_2) \overset{=}{\underset{<}{\geq}} f(x_1)$ cioè f è cresc. (costante / decresc) in (a,b)

$F(x)$ e $G(x)$ def. su un interv. $[a,b]$ su cui è def. $f(x)$ sono primitive di $f(x)$ (cioè $F'(x) = G'(x) = f(x)$) $\iff$ $F(x) - G(x)$ è una costante.

Dim. "SE" è una cost ($\Leftarrow$)
è banale che

$$0 = (c)' = (F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) =$$

cioè $F'(x) = G'(x)$

"SOLO SE" ($\Rightarrow$)

Prendo la funz $F(x) - G(x)$.
La sua derivata su (a,b)
è $F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$
Ma per il corollario di Lagrange se una funz. ha derivata nulla, la funz. è costante: $F(x) - G(x) = c$

TERMINOLOGIA DA RICORDARE:

funzioni :
- LIMITATE — Esempi?
- SIMMETRIE ← PARI (o DISPARI) — "
- MONOTONIA ← CRESCENTI (o DECRESCENTI) in un INTERV.
- PERIODICHE — Esempi?

Stabilire se sono periodiche (e qual è il periodo di):

- $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$
- $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$
- $\cos 3x$
- $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

Delle funzioni precedenti stabilire anche se sono limitate, presentano simmetrie ecc.

Questi sono studi di funzione "intuitivi".
Per funzioni più complicate? La via di studio non è sempre la stessa, ma sono PUNTI FERMI:

- Trovare il più grande insieme su cui è definita: I. D.
- Stabilire il comportamento della funzione negli estremi dell'I.D. (calcolo dei valori o dei limiti negli estremi dell'I.D. con eventuali ASINTOTI)
- Stabilire gli intervalli di monotonia
- Tracciare un grafico.

OPTIONAL: intersezioni con gli assi (se ci sono e si riescono a calcolare); segno; simmetrie, periodicità, concavità.

Esercizi

D11.bis

vedi sol. a pag (A)-(H)

1) $\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

2) $\dfrac{3x+5}{x^2-1}$ (intervalli di monotonia, concavità)

3) $\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}$ estremi relativi

4) $-2x+\ln(e^x-4)$ (asintoti?) monotonia! concavità?

5) $4x-(x+1)\ln[(x+1)^2]$ → In generale $D\ln[f(x)]^2$? → intervalli di monotonia

6) $(x^2-3)e^{-x}$

7) $\operatorname{arctg}(x^2-6x+5)$

8) $\operatorname{arctg}\left(x+\dfrac{4}{x+1}\right)$

9) $2x-3\operatorname{arctg}x$

10) Equazione della retta tangente in $x=0$ al grafico della funzione

- $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{2-x}\right)$
- $f(x)=\dfrac{(x+2)^2(x+3)}{x-1}$

11) Studiare $xe^{1/x}$ completamente.

12) Si verifichi che $\ln x-\dfrac{1}{x^3}$ è invertibile ove definita

13) Crescere e decrescere di $\ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$. Che cosa cambia rispetto a $\dfrac{x-2}{x+2}$?

14) Tangenti nel punto di ascissa $x=0$ ai grafici delle funzioni: e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\tan x$, $\arctan x$

15) Studiare $x\sqrt{x^2-1}$: ATTENZIONE: se $g(x)=\sqrt{x^2-1}$, $g'=\dfrac{x}{g}$ ......

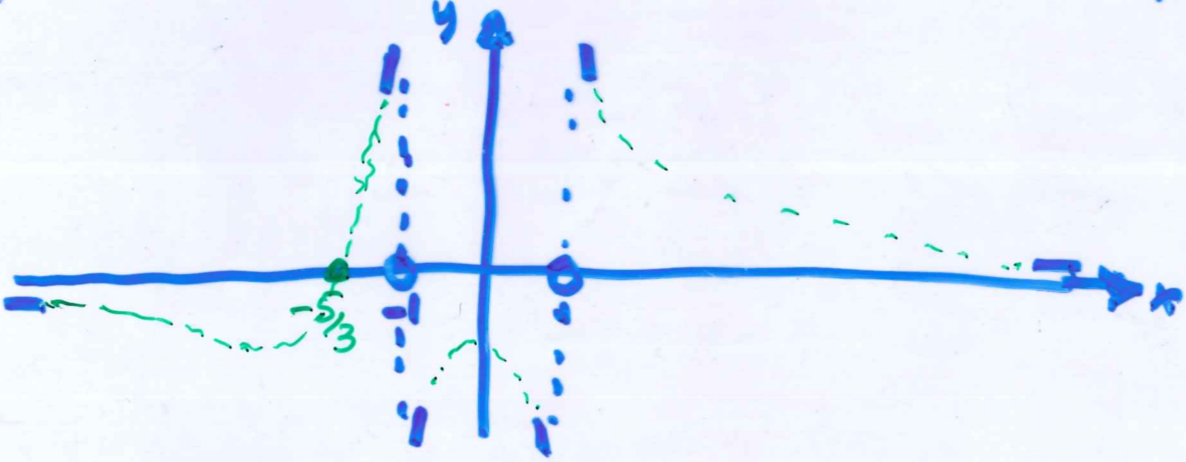
(con anche i flessi)

$f(x) = \dfrac{3x+5}{x^2-1}$ Es 2 p. D11bis (A)

I.D. $x^2-1 \neq 0$ cioè $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x}{x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

per $x \to \pm\infty$ asintoto orizz: $y = 0$



$\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^{\pm}} \dfrac{8}{2(x-1)} = \pm\infty$

asintoto vert. $x = 1$

$\lim\limits_{x \to -1^{\pm}} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^{\pm}} \dfrac{\cancel{2}}{-\cancel{2}(x+1)} = \lim\limits_{x \to -1^{\pm}} \dfrac{-1}{x+1} =$

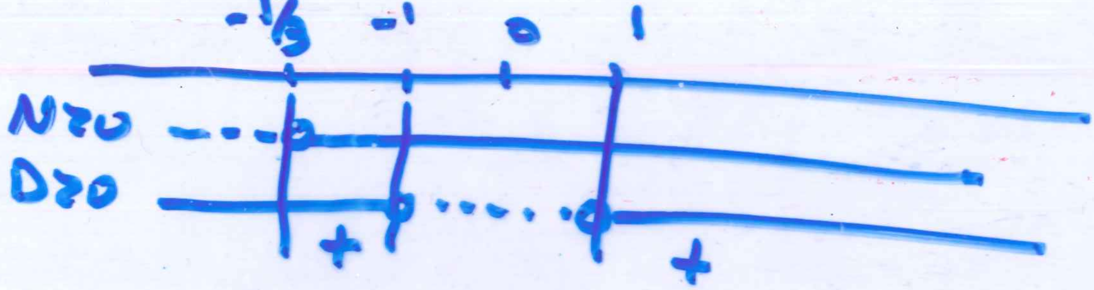
$= \mp\infty$

asint. vert. $x = -1$

Zeri: $f(x) = 0 \iff 3x+5 = 0 \iff x = -5/3$

segno: $f(x) > 0$ $N > 0 \iff x > -5/3$

$D > 0 \iff x < -1$ oppure $x > 1$



$f(x) > 0$ per $x \in (-5/3, -1)$ e $x \in (1, +\infty)$

< 0 per $x \in (-\infty, -5/3)$ e $x \in (-1, 1)$

Monotonia

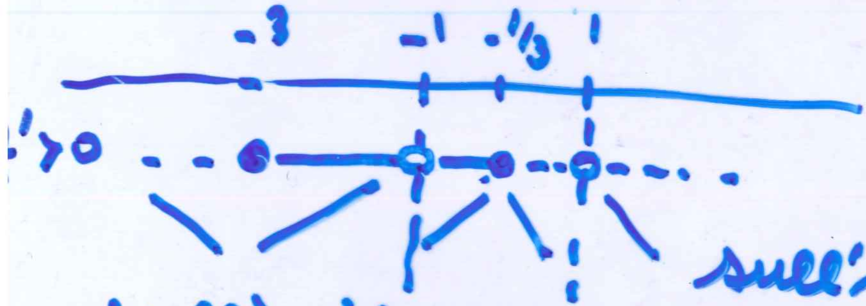
$$f'(x) = \left(\frac{3x+5}{x^2-1}\right)' = \frac{(3x+5)'(x^2-1)-(3x+5)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{3(x^2-1) - 2x(3x+5)}{(x^2-1)^2} = \frac{-3x^2-10x-3}{(x^2-1)^2} \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \text{I.D.} \\ 3x^2+10x+3 \leq 0 \end{cases}$$

$\underline{x = -1/3, -3}$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-9}}{3} = \begin{matrix} -9/3 \\ = -1/3 \end{matrix}$$



sull'interv. $(1, +\infty)$ $f(x)$ decresce

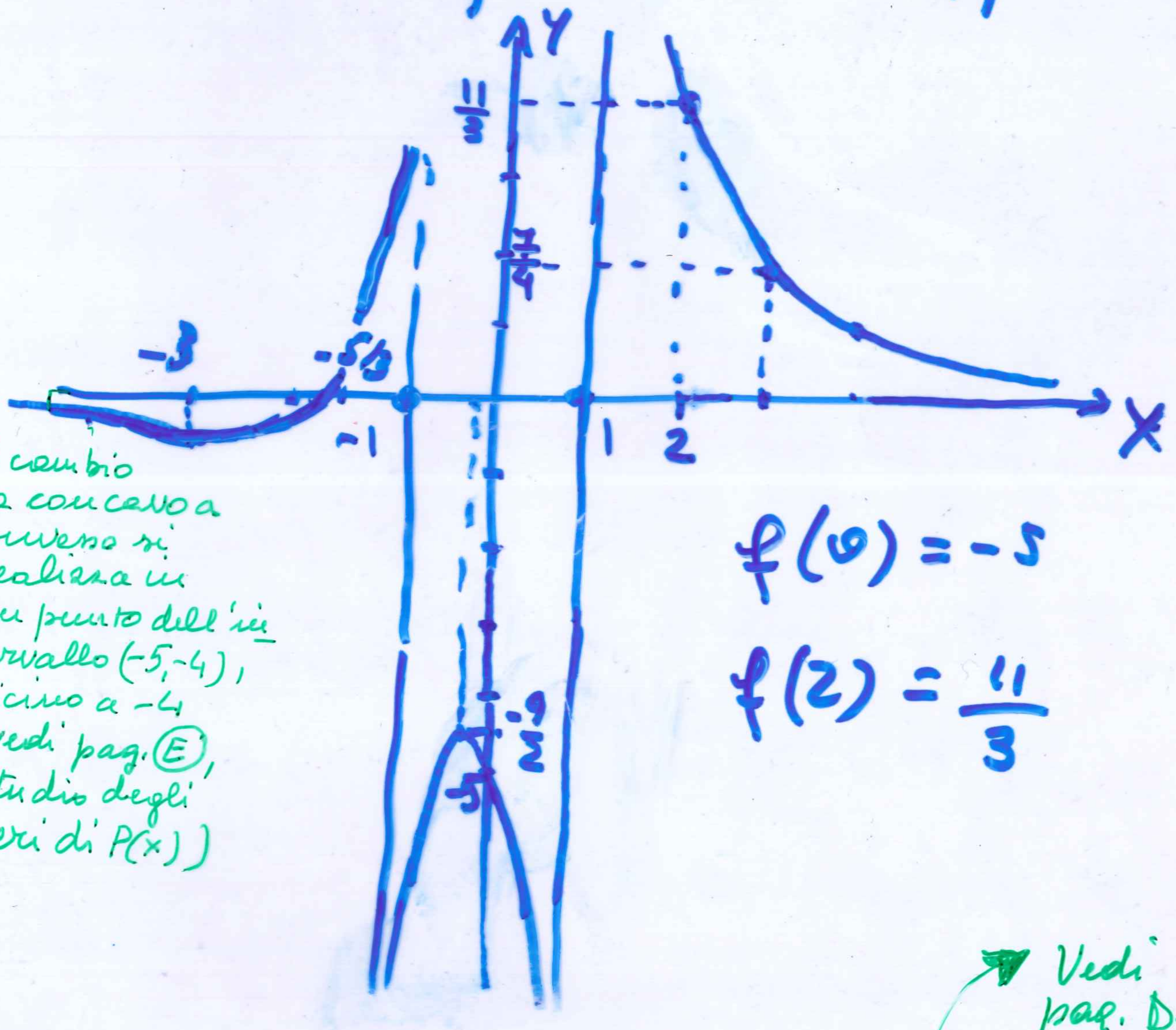
sull'intervallo $(-\infty, -1)$ ho
$f(x)$ decresc in $(-\infty, -3)$
cresc in $(-3, -1)$ $\Longrightarrow$ MIN REL in $x = -3$

sull'interv. $(-1, 1)$ ho
$f(x)$ cresce in $(-1, -1/3)$
decr. in $(-1/3, 1)$ $\Longrightarrow$ MAX REL in $x = -1/3$

ES2 C

$$f(-3) = \frac{3(-3)+5}{9-1} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$f(-1/3) = \frac{3(-1/3)+5}{1/9-1} = \frac{4}{-8/9} = -\frac{9}{2}$$



Il cambio da concavo a convesso si realizza in un punto dell'intervallo (-5,-4), vicino a -4 (vedi pag. E, studio degli zeri di P(x))

$f(0) = -5$

$f(2) = \frac{11}{3}$

Vedi pag. D13

Problema concavo/convesso?

$$f''(x) = \left(-\frac{3x^2+10x+3}{(x^2-1)^2}\right)' = -\left(\frac{3x^2+10x+3}{(x^2-1)^2}\right)' =$$

$$= -\frac{(6x+10)(x^2-1)^{\cancel{2}\,1} - (3x^2+10x+3)\cdot 2\cdot \cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= -\frac{(6x+10)(x^2-1) - 4x(3x^2+10x+3)}{(x^2-1)^3} =$$

$$= -\frac{6x^3+10x^2-6x-10-12x^3-40x^2-12x}{(x^2-1)^3} =$$

$$= -\frac{-6x^3-30x^2-18x-10}{(x^2-1)^3} =$$

$$= 2\,\frac{3x^3+15x^2+9x+5}{(x^2-1)^3}$$

1 radice almeno esiste sicuramente per $x < -1$ ($x<-3$, in realtà, poiché nei punti di un intorno dei punti di minimo la funz è convessa ...). Non si può calcolare usando Ruffini ecc.

Studiamo gli zeri di f'' con il teor. degli zeri! Consideriamo il numeratore:

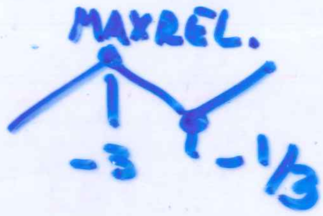
$$P(x) = 3x^3 + 15x^2 + 9x + 5$$

1°) studio la monotonia di $P(x)$:

$$P'(x) = 9x^2 + 30x + 9 = 3(3x^2+10x+3) > 0$$

Es2 E

per $x < -3$ o $x > -\frac{1}{3}$



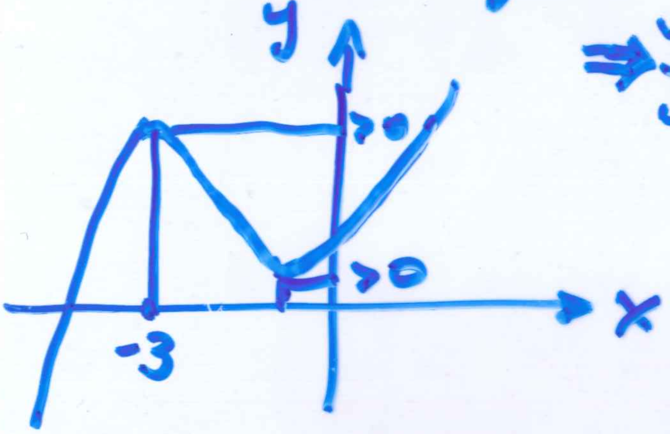
Confronto il segno del valore nel MAX REL e nel min REL.

$P(-3) =$

$= -3\cdot 27 + 15\cdot 9 - 9\cdot 3 + 5 =$

$-3^4 + 5\cdot 3^3 - 3^3 + 5 = 27 + 5 = 32$

$P(-\frac{1}{3}) = -\cancel{3}\cdot\frac{1}{3^{\cancel{3}2}} + 5\cdot\cancel{3}\cdot\frac{1}{3^{\cancel{2}}} - \cancel{9}^{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}} + 5 > 0$



$\Rightarrow$ In $(-3, -\frac{1}{3})$ la funz. è > 0; in $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ pure.

$\Rightarrow$ esiste 1 soluzione nell'intervallo $(-\infty, -3]$

Cerco un $x_0 < -3$ tale che $P(x_0) < 0$

$x_0 = -4$ Non va bene:

$P(-4) = -3\cdot 4^3 + 15\cdot 4^2 - 9\cdot 4 + 5 =$

$= 2\cdot 16 - 36 + 5 = 1 > 0$ ... ma quasi

$P(-5) = -3\cancel{\cdot 5^3} + 3\cancel{\cdot 5^3} - 9\cdot 5 + 5 < 0$

Per il Teor. degli zeri, essendo $P(x)$ continuo in $[-4,-5]$, lo zero sta in $(-4,-5)$ $\longrightarrow$ Bisezione o altro...

DT1bis (F)

4) $f(x) = -2x + \ln(e^x - 4)$ $= \ln\left(e^x\left(1-\frac{4}{e^x}\right)\right) =$
$= \ln e^x + \ln\left(1-\frac{4}{e^x}\right) =$
$= x + o(e^{-x})$

I.D. $e^x > 4 \iff x > \ln 4$

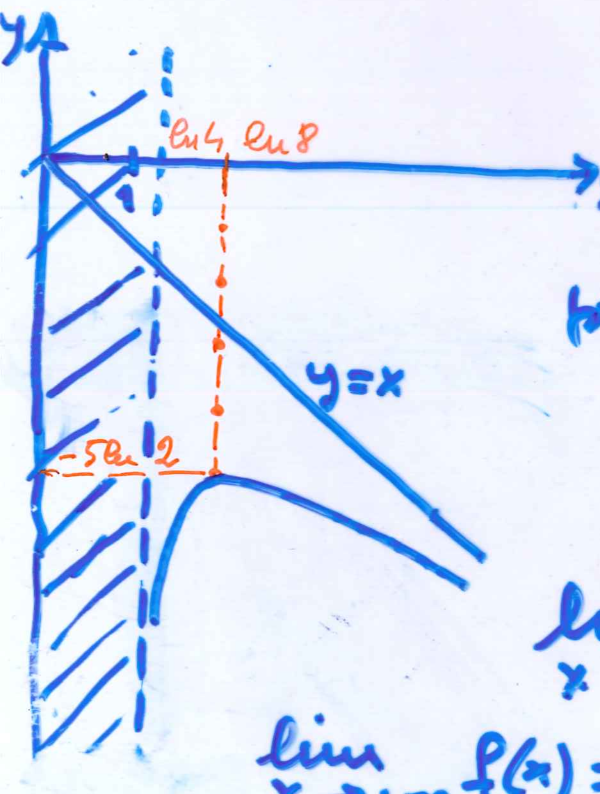
$(\ln 4, +\infty)$

Monotonia

$$f'(x) = -2 + \frac{(e^x-4)'}{e^x-4} = -2 + \frac{e^x}{e^x-4} =$$

$$= \frac{8-e^x}{e^x-4} \geq 0 \iff \begin{cases} x > \ln 4 \\ 8 - e^x \geq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > \ln 4 = 2\ln 2 \\ x \leq \ln 8 = 3\ln 2 \end{cases}$$



$f'(x) > 0$ in $(\ln 4, \ln 8) \Rightarrow$
$f(x)$ è cresc. in $(\ln 4, \ln 8)$
$f(x)$ è decresc. in $(\ln 8, +\infty)$
pto MAX in $x = \ln 8$
VAL. MAX (REL. e ASS.)
$f(\ln 8) = -2\ln 8 + \ln 2 = -5\ln 2$

$$\lim_{x \to \ln 4^+} f(x) = -2\ln 4 + \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-2x + x + o(e^{-x})) = -\infty$$
e c'è asintoto obl. $y = -x$

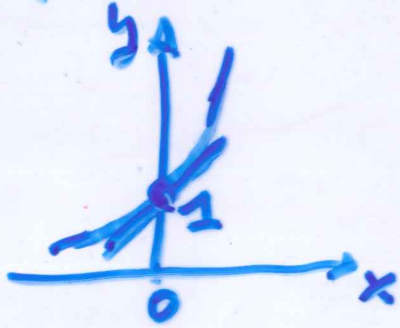
$f(x) = e^x$ **Esercizi 14** D11bis (9)

Eq. della tangente in $(0, f(0))$

$f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$

eq tan : $y = 1 + 1(x-0)$: $y = 1+x$

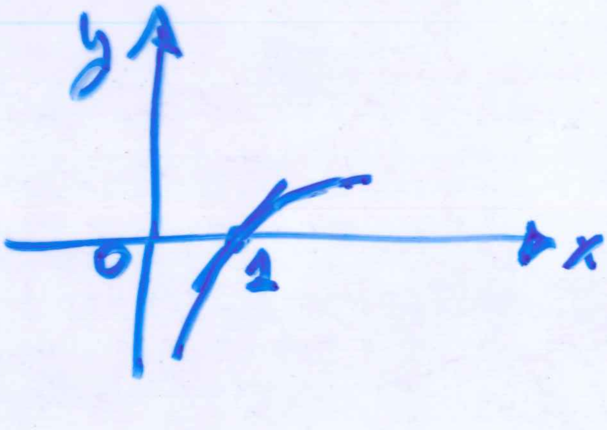


Eq della tang. a $f(x) = \ln x$ in $(1, f(1))$

$f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$

eq: $y = 0 + 1(x-1)$: $y = x-1$



D11bis

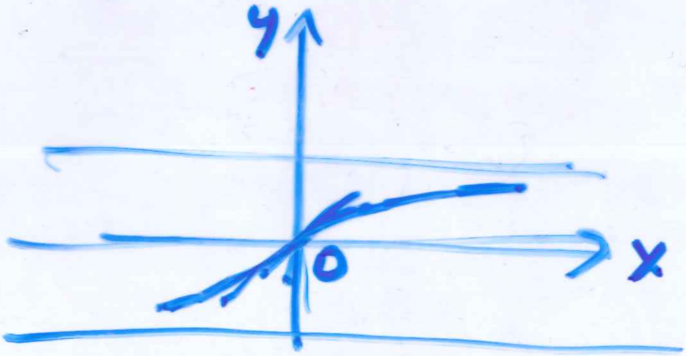
H

Ec. recta tangentă în $(0, f(0))$ a $f(x) = \arctan x$

$f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(0) = 1$

ec. $y = 0 + 1(x - 0)$: $\boxed{y = x}$



Ancora uso del teor. di Lagrange e sue conseguenze

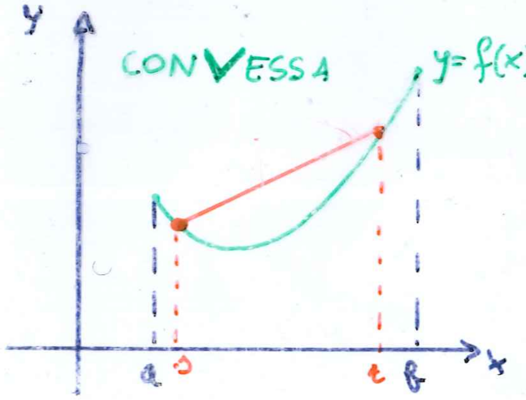
- Studio della convessità - concavità ...

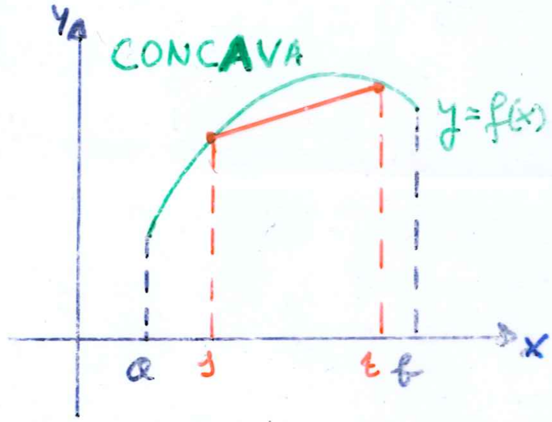
Dico che $f(x)$ è convessa in $[a,b]$ se per tutti gli $s,t \in [a,b]$ il segmento che congiunge

$(s, f(s))$ con $(t, f(t))$

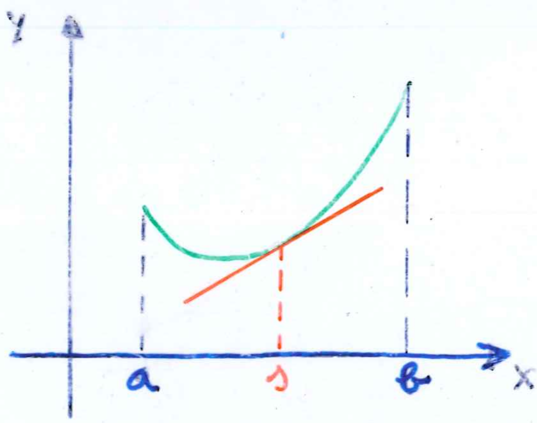
sta SOPRA il grafico di f relativo all'intervallo $[s,t]$

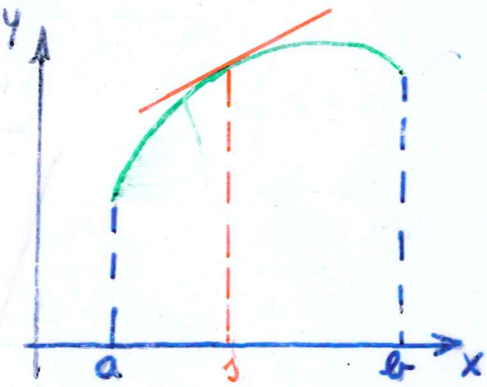
(è concava ... se sta SOTTO)





NOTARE: se la funzione è derivabile in $[a,b]$ in ogni punto del grafico, $(s, f(s))$ è definita la TANGENTE. Dove stanno le tangenti nei due casi?





E che cosa fa il coefficiente angolare della tangente al variare di s in (a,b), nei due casi?
Se f è convessa in (a,b) allora f' cresce in (a,b)

Enunciate così sono **condizioni necessarie di convessità** (concavità). Usando il teor. di Lagrange si fa vedere che sono anche sufficienti. Cioè

se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile, essa è convessa se e solo se la sua derivata $f'(x)$ è una funzione crescente

(è concava ... $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ decrescente)

Se esiste anche la derivata della derivata **prima**
(**= derivata seconda** : $f''(x)$) in (a,b) **allora**

f convessa $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ in (a,b)
f concava $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ in (a,b)
| e vale = solo in punti isolati

Esempi

$f(x) = x^2$ è convessa in $\mathbb{R}$

$f(x) = \ln x$ è concava in $(0,+\infty)$: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$f(x) = x^3$ è ......
$f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow f'' = 6x <$ convessa per $x > 0$, concava per $x < 0$ $\Longrightarrow x = 0$ punto di flesso

Punti di flesso = punti in cui **cambia la concavità**