Enunciate così sono condizioni necessarie di convessità (concavità). Usando il teor. di Lagrange si fa vedere che sono anche sufficienti, cioè

se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile, essa è convessa se e solo se la sua derivata $f'(x)$ è una funzione crescente

(è concava ... $\iff$ $f'(x)$ decrescente)

Se esiste anche la derivata della derivata prima (= derivata seconda : $f''(x)$) in (a,b) allora

f convessa $\iff$ $f''(x) \geq 0$ in (a,b) | e vale = solo in punti isolati
f concava $\iff$ $f''(x) \leq 0$ in (a,b)

Esempi

$f(x) = x^2$ è convessa in $\mathbb{R}$

$f(x) = \ln x$ è concava in $(0,+\infty)$: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$f(x) = x^3$ è ......
$f'(x) = 3x^2 \longrightarrow f'' = 6x <$ convessa per $x>0$, concava per $x<0$ $\Rightarrow x=0$ punto di flesso

Punti di flesso = punti in cui cambia la concavità

■ TEOREMA di de l'Hospital per il calcolo dei limiti con forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

- Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili
- • Sia $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ e $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$
- • • Se $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$
- • • • ed esiste $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

allora $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

l'ipotesi • • • può essere sostituita da $\lim_{x \to a+} f = \lim_{x \to a+} g = \pm\infty$

$\alpha>0 \quad \beta>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \underset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta e^{\beta x}} \underset{H}{=} \ldots\ldots = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{\beta^k e^{\beta x}} :$$

se $k=\lfloor\alpha\rfloor+1$, $x^{\alpha-k}$ ha esponente $<0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-k}=0$

$\Rightarrow$ anche il rapporto tende a zero. Si riscopre il limite già visto con le succes.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha} \underset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0$$ IDEM!

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$ VEDI SVOLGIMENTO PAG 14.1

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2-x}$$ [R: 0]

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2+2x^3}$$ [R: $\frac{1}{2}$]

MA ATTENZIONE: a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\operatorname{sen}x}{\cos x-x}=-2$ VEDI D14.2

b) $$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sin(x-1)}{(\ln x)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{-t\sin t}{(\ln(1+t))^2} = \lim_{t\to 0}\frac{-t^2}{(t)^2}=-1$$

per sostituzione $\boxed{x-1=t}$

usando gli asintotici per $t\to 0$

Invece con de l'Hospital:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1\sin(x-1)+(1-x)\cos(x-1)}{2\ln x\cdot\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$ prima di ri-utilizzare de l'Hospital almeno rileggere il limite:

$$=\left(\lim_{x\to 1}\frac{x}{2}\right)\lim_{x\to 1}\left(\frac{-\sin(x-1)+(1-x)\cos(x-1)}{\ln x}\right) \underset{H}{=} \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{-\cos(x-1)-\cos(x-1)+\underbrace{(x-1)\operatorname{sen}(x-1)}_{\to 0}}{1/x}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\left(-2x\cos(x-1)+x(x-1)\operatorname{sen}(x-1)\right) = -\frac{2}{2}=-1.$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x^\alpha}{x} = \qquad \alpha > 0$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x + o(x) - x^\alpha}{x} \quad \begin{cases} \alpha \in (0,1) \\ \alpha = 1 \\ \alpha > 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Tre casi diversi}}$

$\boxed{0 < \alpha < 1}$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} (x^{1-\alpha}) = 0$. Quindi il limite diventa: $\lim_{x \to 0^+} \frac{-x^\alpha}{x} = -\infty$

$\boxed{\alpha > 1}$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha - 1} = 0$. Quindi il limite diventa: $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

$\boxed{\alpha = 1}$ In questo caso c'è anche $\lim_{x \to 0}$ (Senza verso, come sempre se l'esponente è intero)

e $\lim_{x \to 0} \frac{x + o(x) - x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} \ ? =$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 0 - 1}{1} = \frac{1-1}{1} = 0$$

Analogamente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 0 - 1}{2x} =$$

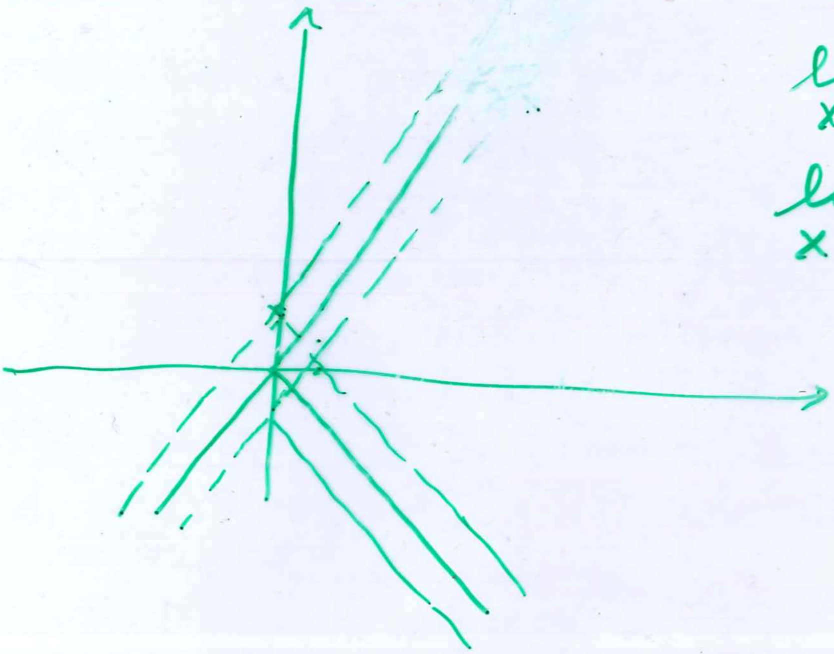
$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

NE DEDUCO:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} - \frac{1}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 = o(x^2) \Rightarrow \boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \operatorname{sen} x}{\cos x - x} = ?$$



$$\lim_{x \to +\infty} 2x + \operatorname{sen} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \cos x - x = -\infty$$

potrei cercare di usare De L'Hospital.

Derivo numeratore e denominatore

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \cos x}{-\operatorname{sen} x - 1}$$

non esiste! ma ciò non significa che non esista il lim. di partenza. Infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \operatorname{sen} x}{\cos x - x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x\left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{2x}\right)}{-x\left(1 - \frac{\cos x}{x}\right)} =$$

$\frac{\operatorname{sen} x}{2x} \to 0$ poiché $|\operatorname{sen} x| \leq 1$

$\frac{\cos x}{x} \to 0$ poiché $|\cos x| \leq 1$

$$= \frac{2}{-1} = -2$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-4}\right) - 2x$$

ID: $\frac{x}{x-4} > 0 \quad (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln 1 - 2x = +\infty$

asintoto obliquo $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-2)x = 0$

$\Rightarrow$ per $x \to -\infty$ as. obl. è $y = -2x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln 1 - 2x = -\infty$ as. obl. $y = -2x$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \ln\left(\boxed{\frac{x}{0-4}}\right) - 2 \cdot 0 = -\infty$

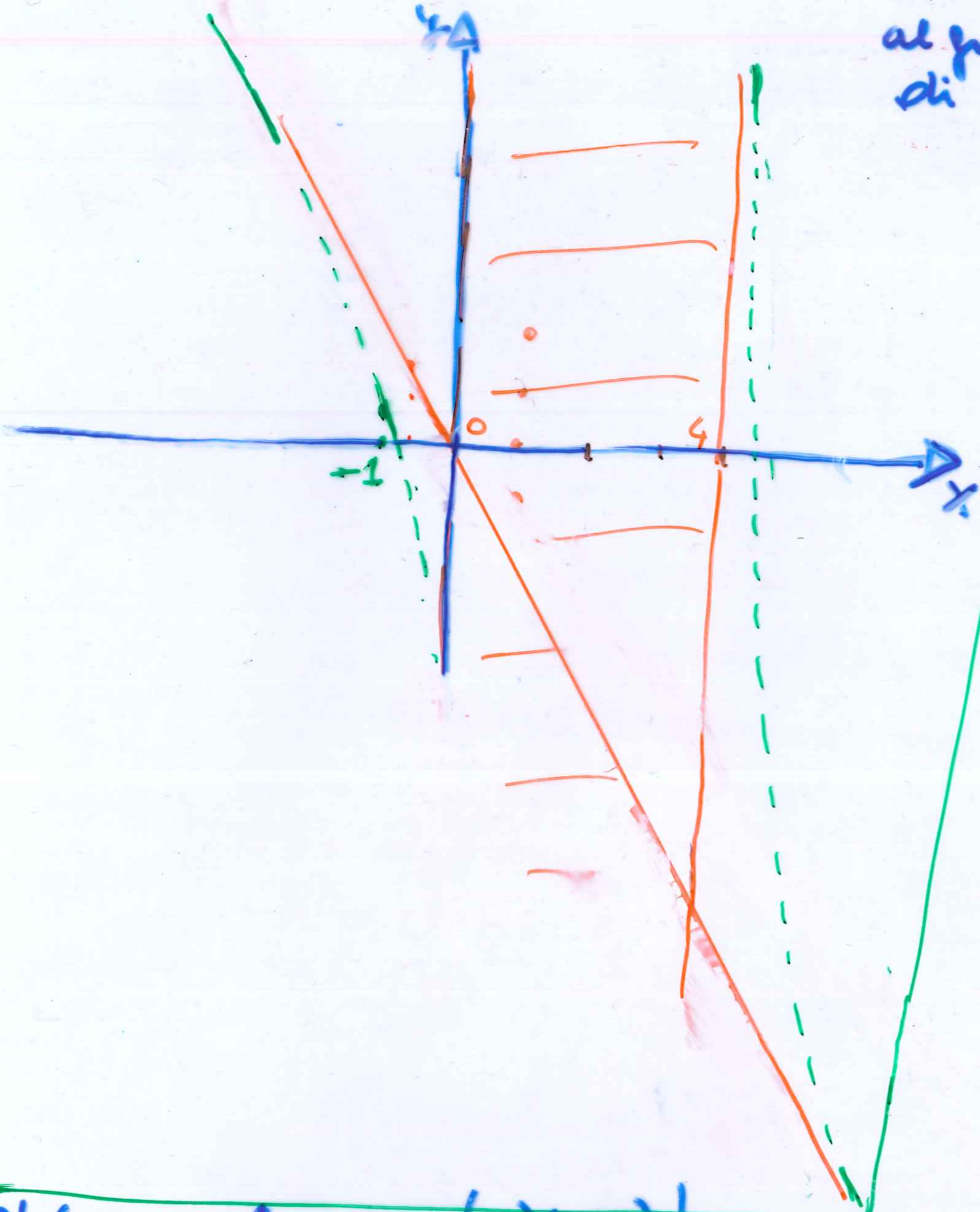
$\to 0^+$

asintoto verticale $x = 0$ (per $x \to 0^-$)

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \ln \frac{4}{x-4} - 2 \cdot 4 = +\infty$

$\to 0^+$

asint. vert. $x = 4$ per $x \to 4^+$.



eq. delle tang. al grafico nel punto di ascissa $x=-1$ (2

$$f'(x)=\frac{-4}{x(x-4)}-2$$

$$f'(-1)=-\frac{4}{5}-2=$$
$$=-\frac{14}{5}$$

$$f(-1)=\ln\left(\frac{-1}{-5}\right)+2=$$
$$=2-\ln 5$$

$\Rightarrow$ eq delle retta tang in $(-1, f(-1))$

$$y=\frac{-14}{5}(x+1)+2-\ln 5$$

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x}{x-4}}\cdot\left(\frac{x}{x-4}\right)'-2=$$

$$=\frac{\cancel{x-4}}{x}\cdot\frac{1\cdot(x-4)-1\cdot x}{(x-4)^{\cancel{2}}}-2=$$

per il calcolo del coeff. ang. delle tan. sostituisco $x=-1$ NELLA PRIMA ESPRESSIONE UTILE di $f'(x)$, non nelle sue elaborazioni (ERRORI!!)

$$=\frac{-4-2(x^2-4x)}{x(x-4)}=$$

$$=-2\ \frac{x^2-4x+2}{x(x-4)}$$

questa è forma utile per il calcolo della monotonia

Monotonia

$$f'(x) = \frac{-2(x^2-4x+2)}{x(x-4)} \geq 0$$

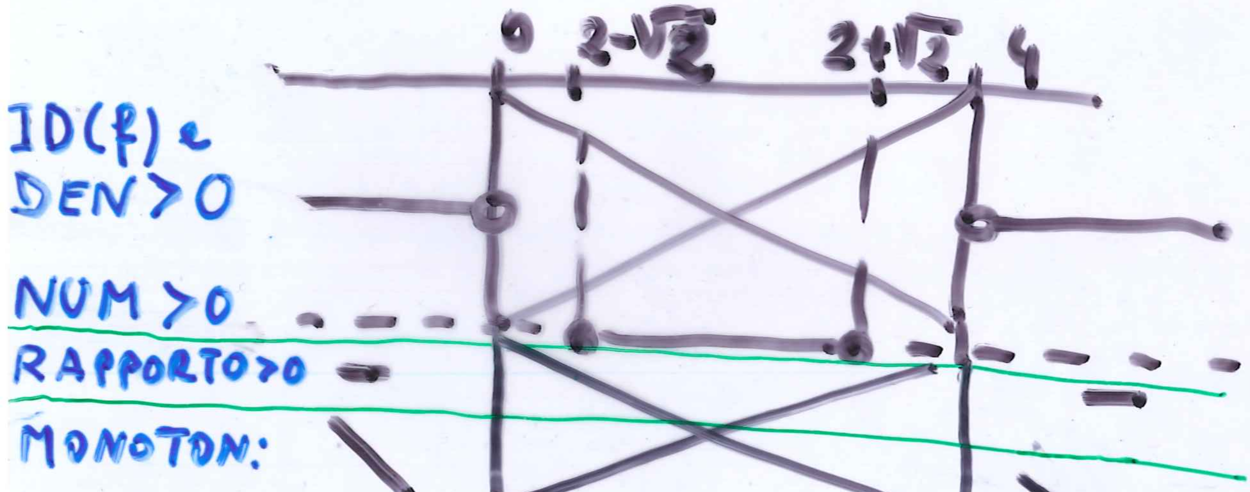
in $(-\infty, 0)$ e in $(4, +\infty)$ DEN >0

NUM >0 per $x^2-4x+2 \leq 0$

TROVO GLI ZERI del polinomio:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

NUM. >0 per $x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$



$f'(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$ e in $(4, +\infty)$ in ciascuno dei 2 interv. la $f(x)$ decresce.

controllare sempre che gli zeri di $f'(x)$ cadano nell' I.D. di $f(x)$ (e di $f'(x)$)

(4

Intervalli di convessità/conc.

$$f'(x) = \frac{-4}{x(x-4)} - 2$$

$$\Rightarrow f''(x) = -4 \frac{-(2x-4)}{((x-4)x)^2} - 0 =$$

$$= \frac{8(x-2)}{((x-4)x)^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \\ x > 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ su $(-\infty, 0)$ $f''(x) < 0 \Rightarrow$ $f(x)$ concavo

su $(4, +\infty)$ $f''(x) > 0 \Rightarrow$ $f(x)$ convessa

Non ci sono punti di cambio di concavità, quindi non devo cercare punti di flesso

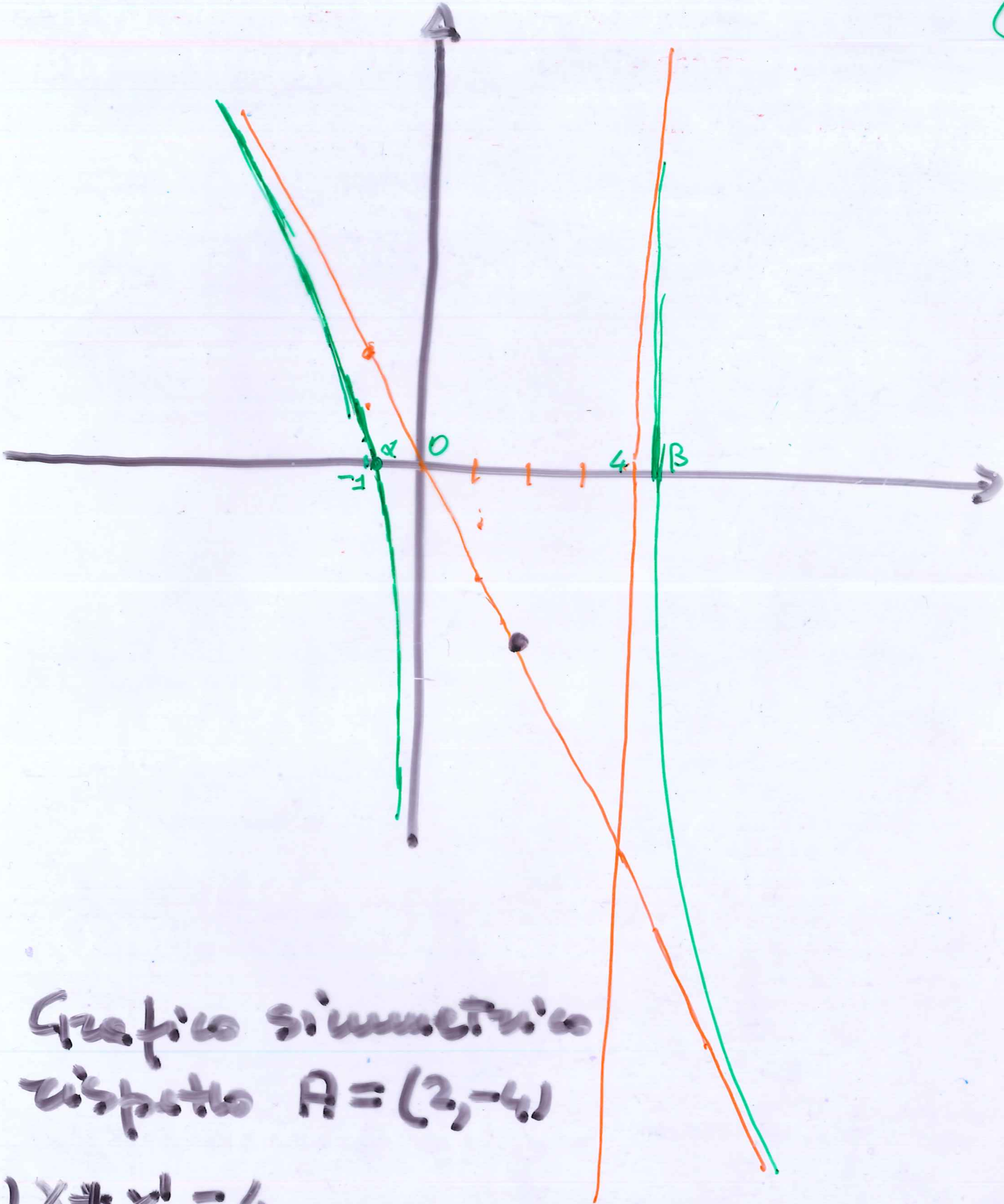


Grafico simmetrico rispetto $A = (2, -4)$

$$\begin{cases} x + x' = 4 \\ y + y' = -8 \end{cases}$$

(vedi pag 8)

Zeri e segno?

Osservo

1) $f(x)$ è derivabile in $(-\infty, 0)$ e in $(4, +\infty)$ e quindi è continua in ciascuno dei due intervalli

2) in $(-\infty, 0)$ ho

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e quindi esiste un $\bar{x} < 0$ (ad es. $\bar{x} = -1$) tale che $f(\bar{x}) > 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ e quindi esiste un $\bar{\bar{x}} \in (-1, 0)$ tale che $f(\bar{\bar{x}}) < 0$

$\Rightarrow$ in $[-1, \bar{\bar{x}}]$ $f(x)$ è continua e $f(-1) f(\bar{\bar{x}}) < 0$

$\Rightarrow$ (teor degli zeri) esiste uno zero α in $(-1, \bar{\bar{x}})$

3) in $(-\infty, 0)$ la $f(x)$ è monotona (decr) $\Rightarrow$ è iniettiva: esiste un solo punto di $(-\infty, 0)$ in cui la funz. assume un certo valore e in part. il valore ZERO

$\Rightarrow$ α è l'unico zero in $(-\infty, 0)$

Stesso ragionamento sull'intervallo $(4, +\infty)$ dove ci sarà 1 e 1 solo zero $\beta \in$ $\in (4, 5)$ (per la simmetria).

Poiché in $(-\infty, 0)$ la funz decresce

e $f(\alpha)=0$

$$f(x)>0 \quad \text{in} \quad (-\infty, \alpha)$$
$$f(x)<0 \quad \text{in} \quad (\alpha, 0)$$

Poiché in $(4, +\infty)$ la funz. decresce

e $f(\beta)=0$

$$f(x)>0 \quad \text{in} \quad (4, \beta)$$
$$f(x)<0 \quad \text{in} \quad (\beta, +\infty)$$

Simmetria

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-4}\right) - 2x$$

dico che è simm. risp. a $(2,-4) = A$

(Se c'è un punto di simmetria non può essere un altro poiché il dominio di f deve essere simmetrico rispetto all'ascissa $\Rightarrow$ punto medio di $(0,4)$ e l'asintoto deve essere simmetrico di se stesso rispetto ad A $\Rightarrow A \in$ asintoto)

$$\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = -8 - y \end{cases} \quad (*) \qquad \text{con } y = f(x),\ y' = f'(x')$$

In effetti:

$$y' = \ln\frac{4-x'}{-x'} - 2(4-x') = \ln\frac{x'-4}{x'} - 8 + 2x' =$$

$$= -\left(\ln\frac{x'}{x'-4} - 2x'\right) - 8 = -f'(x') - 8$$

Per ricavare le $(*)$ ragionare così: $\rightarrow$

2 è punto medio del segmento di estremi x, x': $\frac{x+x'}{2} = 2$

-4 è punto medio del segm. di estremi y, y' $\frac{y+y'}{2} = -4$

15) $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$

I.D. $x^2-1 \geq 0$: $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x|x| =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \pm x^2 = \pm\infty$$

NO ASINTOTI OBLIQUI NÉ ORIZZ.

$f(-x) = -x\sqrt{x^2-1} = -f(x)$ dispari

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$ (funz. cont. da destra)

$$f'(x) = \sqrt{x^2-1} + x \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{x^2-1+x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} \geq 0$$

I.D. $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

poiché $|x| \geq 1$ $2x^2 \geq 2$ $\Rightarrow$ $2x^2-1 \geq 1 > 0$

$\sqrt{x^2-1} > 0$ purché $x \neq \pm 1$

$f'(x) > 0$ $\forall x \in$ I.D.(f')

in $x = \pm 1$ la derivata non c'è, ma

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2-1}{\sqrt{2(x-1)}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = +\infty$$

ho due tangenti verticali in $x = 1$, $x = -1$

concavità / convessità

$$f'(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

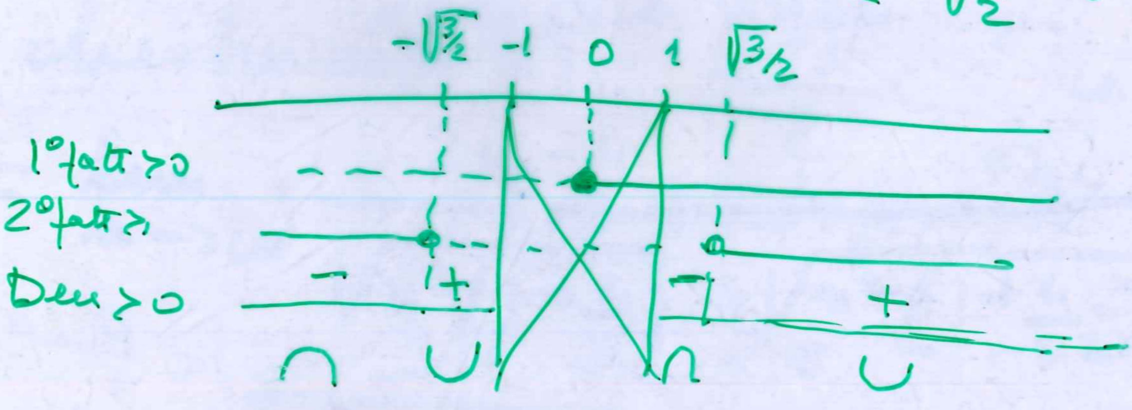
$$f''(x) = \frac{4x \cdot \sqrt{x^2-1} - (2x^2-1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} =$$

$$= x \cdot \frac{4(x^2-1) - (2x^2-1)}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= x \cdot \frac{2x^2-3}{(x^2-1)^{3/2}} \geq 0$$

denom > 0 $\qquad$ $2x^2-3 \geq 0$ per

$x \leq -\sqrt{\frac{3}{2}}$ o $x \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$

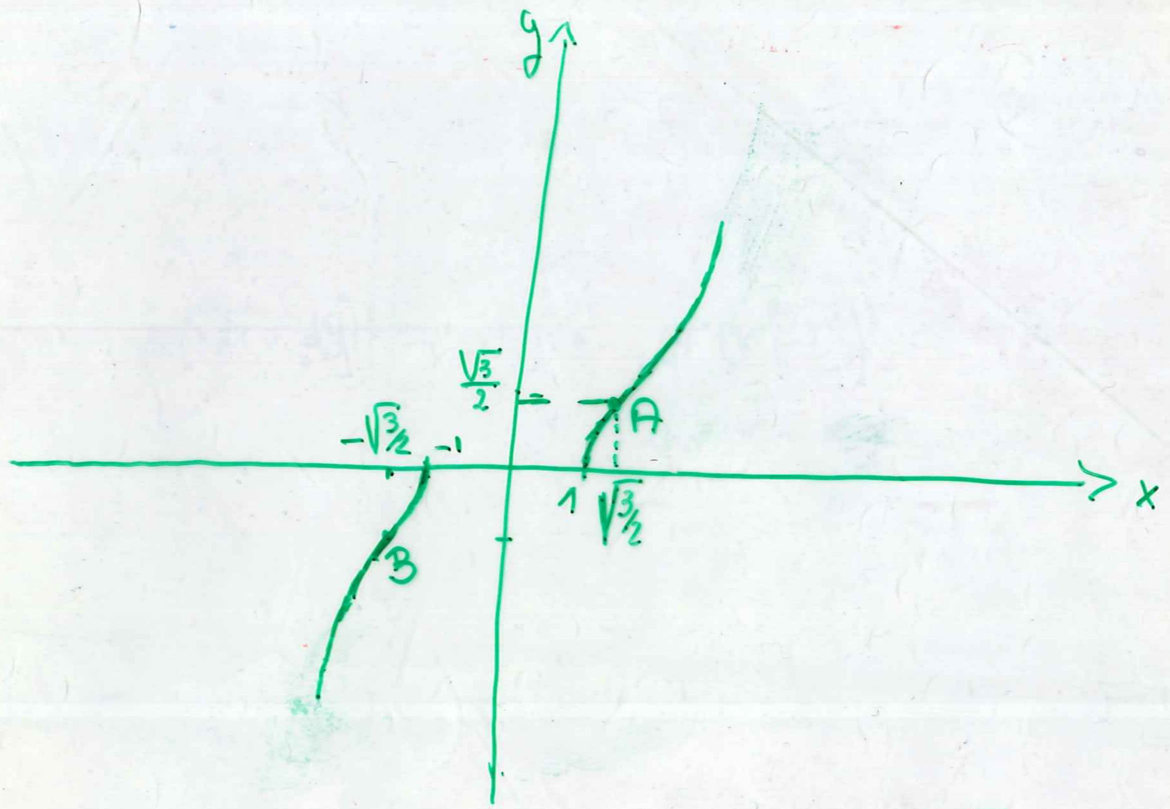


Zeri e segno

$f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ $\quad > 0$ per $x > 1$

< 0 per $x < -1$

$= 0$ per $x = \pm 1$



$$f\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)=\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\sqrt{\tfrac{3}{2}-1}$$

punti flesso $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=A$

$$\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=B$$

Equazione della retta tangente nei punti di flesso:

$$f'\left(\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)=\frac{2\left(\frac{3}{2}\right)-1}{\sqrt{\frac{3}{2}-1}}=\frac{2}{\sqrt{1/2}}=2\sqrt{2}$$

eq tan in A : $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{2}\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

in B : $y+\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{2}\left(x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

— · — · — · —

Esercizio. Mostrare che la funz

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua, derivabile con derivata 0 in $x=0$.

Ma $x=0$ non è un punto di min
né di max
né con un flesso
a tangenza.

C'è la f''?