$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 . \end{cases}$$

È continua in $x = 0$; infatti:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \text{(limitata)} = 0 = f(0)$$

È derivabile in $x=0$. Infatti esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0$$

$f'(0) = 0$ la tang. in $(0,0)$ è orizzontale

È 2 volte derivabile in $x=0$?

calcolo

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + \cancel{x^2} \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}} \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) =$$

$$= 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

e poi il limite del rapporto increm. di $f'(x)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h \operatorname{sen} 1/h - \cos 1/h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} 2 \operatorname{sen} \frac{1}{h} - \frac{1}{h} \cos \frac{1}{h} \quad \text{non esiste}$$

$$f''(x) = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 2\frac{x}{x^2} \cos \frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \sin \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{2x^2 \operatorname{sen} 1/x - 2x \cos 1/x - \operatorname{sen} 1/x}{x^2}$$

non ha un segno costante in un intervallo (destro o sinistro) di $x=0$

$\Rightarrow$ in $x=0$ non c'è un punto di flesso.

$$\ln(31+x) - \arctan x = f(x)$$

1. D. $x > -31$

$$\lim_{x \to -31^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$ senza asint. (come $\ln x$)

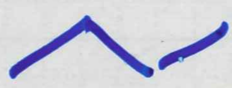
$$f'(x) = \frac{1}{31+x} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1+x^2-31-x}{\underbrace{(1+x^2)}_{>0}\underbrace{(31+x)}_{>0}} \geq 0$$

$N = x^2 - x - 30 \geq 0$

$(x-6)(x+5) \geq 0$ per $x \leq -5$ o $x \geq 6$

$f(x)$ cresce in $(-31,-5)$
decresce in $(-5,6)$
cresce in $(6,+\infty)$

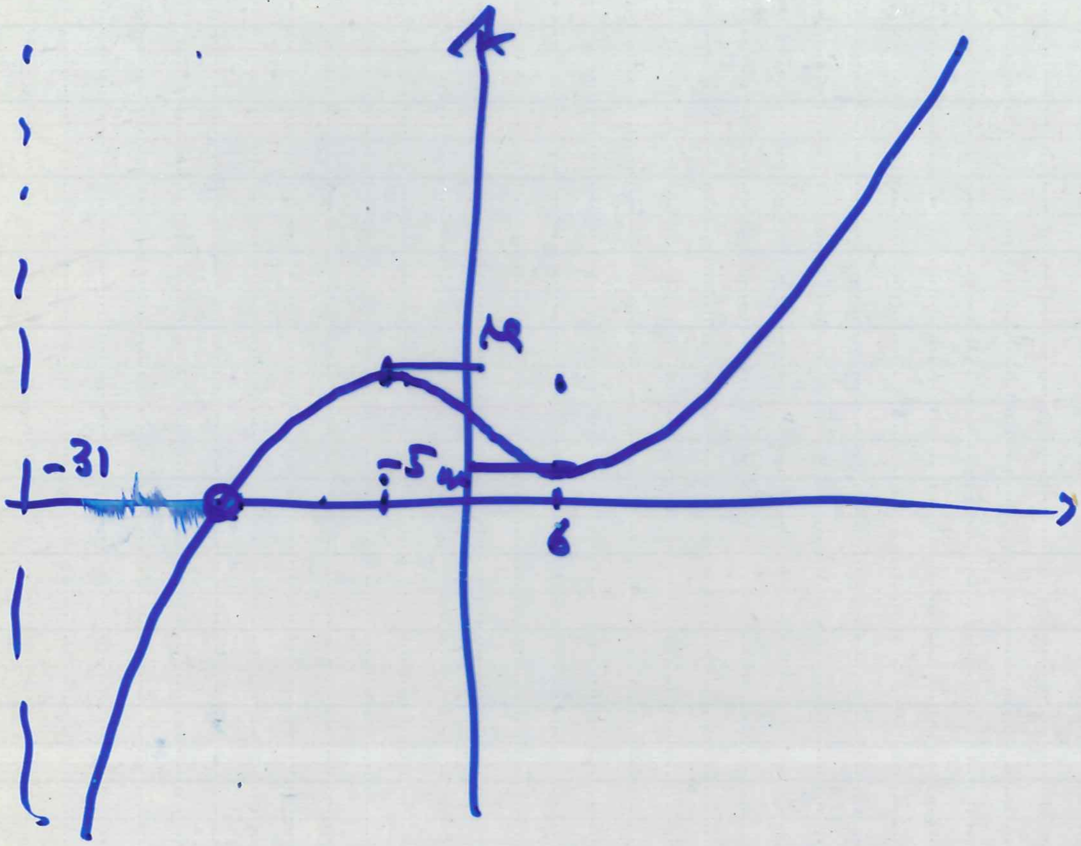


in $x=-5$ ha un max rel $f(-5) = \underbrace{\ln 26 + \arctan 5}_{>0}$

$x = 6$ ha un min rel.

$$f(6) = \underbrace{\ln 37}_{3< \ <4} - \underbrace{\arctan 6}_{<\frac{\pi}{2}}$$

$\Rightarrow f(6) > 0$



C'è uno zero in (-31, -5)

Derivate successive

Supponiamo che $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sia derivabile in ogni punto $x_0 \in (a_1, b_1) \subseteq (a,b)$.

Resta definita una funzione

$$f' : (a_1, b_1) \to \mathbb{R}$$
$$x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

che si chiama FUNZIONE DERIVATA di f.

Si possono allora cercare i punti x_1 di (a_1, b_1) in cui la funzione f' è derivabile cioè esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_1+h) - f'(x_1)}{h} = (f')'(x_1).$$

Per semplicità si scrive f'' invece di $(f')'$ e si chiama $f''(x_1)$ derivata seconda di f in x_1.

Se in ogni punto $x_1 \in (a_2, b_2) \subseteq (a_1, b_1)$ la funzione f' è derivabile, resta definita una nuova funzione

$$f'' : (a_2, b_2) \to \mathbb{R}$$
$$x_1 \longmapsto f''(x_1)$$

che si chiama funzione derivata seconda di f.

Proseguendo così, a partire dalla funzione derivata n-esima di f

$$f^{(n)} : (a_n, b_n) \to \mathbb{R}$$

si può definire la derivata $(n+1)$-esima in un punto $x_n \in (a_n, b_n)$ come

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(x_n+h) - f^{(n)}(x_n)}{h} = f^{(n+1)}(x_n)$$

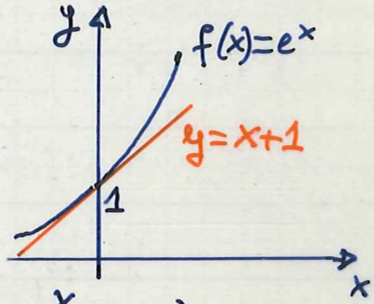
(se esiste finito).

ESEMPIO: calcolare le derivate successive di x^6.

Derivate seconde: usi intelligenti.

- Stabilire per quali valori di x è verificata la disuguaglianza $e^x - 1 - x > 0$. (1)

Risolvo $e^x > x+1$ con metodo grafico.



* $y=x+1$ è la retta tangente in $(0,1)$ al grafico di $f(x)=e^x$

* $f(x)$ è convessa su $\mathbb{R}$ (infatti $f''(x)=e^x>0$)

$\Rightarrow$ $y=x+1$ sta sempre "sotto" il grafico di $f(x)$

$\Rightarrow$ la disuguaglianza vale purché ...

- Stabilire dove è crescente la funzione

$$f(x) = \sqrt{4x^2-x} - \sqrt{x^2+1}.$$

Calcolo $f'(x)$ [per velocizzare: $4x^2-x = F(x)$, $x^2+1 = G(x)$]

$$f'(x) = \frac{8x-1}{2\sqrt{F}} - \frac{x}{\sqrt{G}}$$: SEGNO ??

Provo a calcolare $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{8\sqrt{F} - (8x-1)^2/2\sqrt{F}}{2F} - \frac{\sqrt{G} - x^2/\sqrt{G}}{G} =$$

$$= \frac{-1}{4F^{3/2}} - \frac{1}{G^{3/2}} < 0$$

$\Rightarrow$ $f'(x)$ decresce in $(-\infty,0)$ e in $(1/4,+\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{-4x} - \frac{x}{-x} = -1 < 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{2\sqrt{-x(1-4x)}} - \frac{0}{\sqrt{0+1}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{2\sqrt{-x}} = -\infty$$

Poiché $f'(x)$ è decrescente in $(-\infty,0)$ si deduce che $f'(x)<0$ $\forall x \in (-\infty,0)$, cioè $f(x)$ decresce in $(-\infty,0)$

---

(1) Simile: studiare il segno di $x\ln x > x-1$.

Invece in $(1/4, +\infty)$ si ha:

$$\lim_{x \to \frac{1}{4}^+} f'(x) = \lim_{x \to \frac{1}{4}^+} \frac{8x-1}{2\sqrt{x(4x-1)}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{4}^+} \frac{2-1}{\frac{2}{2}\sqrt{4x-1}} - \frac{1/4}{\sqrt{5}/2} = \lim_{x \to \frac{1}{4}^+} \frac{1}{\sqrt{4x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{5}} =$$

$$= +\infty$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{8x}{4x} - \frac{x}{x} = 1 > 0$$

e, visto che f' è decrescente in tutto l'interv.,

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (1/4, +\infty)$

$\Rightarrow f(x)$ crescente in $(1/4, +\infty)$.

Il risultato è coerente con i limiti di $f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2-x} - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} 2|x| - |x| = +\infty$$

mentre

$$\lim_{x \to 1/4^+} f(x) = 0 - \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 - 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -2x + x = +\infty$$

Si vede inoltre che sono "possibili" asintoti obliqui per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ il primo con coeff. ang. 1, il secondo con coeff. ang. -1

per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-x} - (\sqrt{x^2+1} + x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2-x-(x^2+1+x^2+2x\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{4x^2-x} + \sqrt{x^2+1} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-x-1-2x\sqrt{x^2+1}}{4x} = \quad \boxed{\frac{-1}{4x} \to 0}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1-2\sqrt{x^2+1}}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2-4x+1-4x^2-4}{2x-1+2\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x-3}{4x} = -\frac{1}{4}$$

ASINT. OBL. $y = x - \frac{1}{4}$

per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2-x} - (\sqrt{x^2+1} - x) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x-1+2x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{4x^2} + (\sqrt{x^2} - x)} =$$

$\sqrt{x^2} = |x| = -x$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1+2\sqrt{x^2+1}}{-4} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x+1-4}{-4(2x-2(-x))} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+3}{4\cdot 4x} = \frac{1}{4}$$

ASINT. OBL. $y = -x + \frac{1}{4}$

FARE IL GRAFICO!

Approssimazioni locali

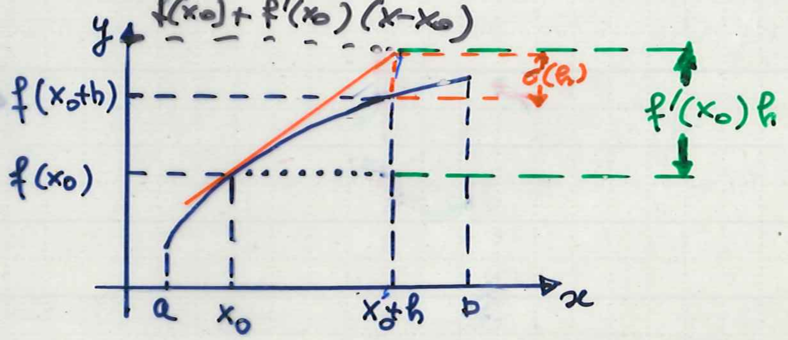
Già visto: Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e $x_0+h\in(a,b)$

$$* \qquad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + o(h)$$

ove $o(h)$ significa che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} = 0$$

Geometricamente:



... se $h\to 0$ posso sostituire a $f(x_0+h)$ il valore

$f(x_0)+h\cdot f'(x_0)$, ordinata del punto, sulla tangente in $(x_0,f(x_0))$, che ha ascissa x_0

Di solito si indica "l'incremento calcolato lungo la tangente": $hf'(x_0)$ con il simbolo df, <u>differenziale di f in x_0</u>.
Se $f(x)=x$, $f'(x)=1 \Rightarrow dx=h$. Si arriva così alla scrittura

$$df = f'(x_0)\,dx.$$

Altra cosa già vista:

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), esiste $c\in(a,b)$ t.c. $f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$

e, se $x_0, x_0+h\in[a,b]$, esiste $c\in(a,b)$ t.c.

anzi interno all'intervallo di estremi x_0 e x_0+h

$$** \qquad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(c)\cdot h$$

*,** Sono due formule di approssimazione "locali" cioè valide in un "piccolo" intorno di x_0.