Voglio generalizzare. Perché?

- Calcolo di limiti.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x+o(x))-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2} = ??$$

(*) $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{(1+x)(\ln(1+x))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(x+o(x))-x}{(1+x)(x+o(x))^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2+o(x)+x\,o(x)-x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2} = ??$$

- Stima di "quel che trascuro"

Come generalizzo? Ho visto che la derivata seconda mi dà indicazioni sulla curvatura del grafico ("quanto il grafico è diverso da una retta?").

Mi chiedo: posso generalizzare ** utilizzando * come passo di partenza?

Cioè esiste un numero reale k tale che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + k\,h^2$$

Se sì

$$f'(x_0+h) = f'(x_0) + 2k\,h.$$

La funzione f' è derivabile su (a,b) e continua su $[a,b]$?

Se sì il teorema di Lagrange dice che $\exists\, c \in \cancel{(a,b)}\ (x_0, x_0+h)$ t.c.

$$\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} = f''(c)$$

intermedio tra x_0 e x_0+h

$\Rightarrow$ basta scegliere $k = \frac{1}{2} f''(c)$.

Concludendo:

(*) Questo esempio proviene dal calcolo e studio della derivata di $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$

Più in generale, se voglio un polinomio P di grado (n+1) che approssimi abbastanza bene f(x) "abbastanza vicino" a x_0 possiamo ragionare così

Per comodità prendo $n+1=3$, ma il discorso (euristico) può essere facilmente generalizzato.

Supponiamo che ci siano le prime $n=2$ derivate di $f(x)$ e siano continue in $[a,b]$ e che ci sia la derivata $(n+1)$-esima (terza) in (a,b).

Voglio che in x_0 P e le sue derivate fino alla n-esima (seconda) abbiano lo stesso valore di f e delle sue derivate

$$P(x) = A + B(x-x_0) + C(x-x_0)^2 + D(x-x_0)^3 \Rightarrow P(x_0) = A = f(x_0)$$

$$P'(x) = B + 2C(x-x_0) + 3D(x-x_0)^2 \Rightarrow P'(x_0) = B = f'(x_0)$$

$$P''(x) = 2C + 6D(x-x_0) \Rightarrow P''(x_0) = 2C = f''(x_0)$$

$$P'''(x) = 6D$$

$$\Longrightarrow P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + D(x-x_0)^3$$

Si può riscrivere: $P(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + Dh^3$.

Se questo polinomio in x_0+h deve valere quanto f:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + Dh^3$$

devono essere uguali anche le derivate rispetto a h:

$$f'(x_0+h) = f'(x_0) + f''(x_0)h + 3Dh^2$$

$$f''(x_0+h) = f''(x_0) + 2\cdot 3D\cdot h$$

Applico il teorema di Lagrange in $[x_0, x_0+h]$ (o $[x_0+h, x_0]$ se $h<0$) (f'' è cont. in $[a,b]$ e $\exists f'''$ in (a,b)): esiste $c \in (x_0, x_0+h)$ (o ....) t.c. $f''(x_0+h) - f''(x_0) = f'''(c)\cdot h$

$$\Longrightarrow 2\cdot 3D = f'''(c) \Longrightarrow D = \frac{f'''(c)}{3!}$$

∎

TEOREMA di TAYLOR. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e

- esista f' in $[a,b]$, continua in $[a,b]$
- " f'' in (a,b)

Allora se $h>0$ esiste un $c \in (x_0, x_0+h) \subseteq (a,b)$

[" $h<0$ " " $c \in (x_0+h, x_0) \subseteq (a,b)$]

tale che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \boxed{\tfrac{1}{2} f''(c)\,h^2}$$

Questa formula dice che nella formula

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \boxed{o(h)}$$

l' $o(h)$ che "trascuro" ha l'ordine di grandezza di h^2.

In generale

TEOR. di TAYLOR (forma di Lagrange). Considero $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

- $f, f', \dots, f^{(n)}$ siano continue in $[a,b]$
- esista $f^{(n+1)}$ in (a,b).

Sia $x_0 \in (a,b)$ e $x_0+h \in (a,b)$. Allora

se $h>0$ esiste un $c \in (x_0, x_0+h)$

[" $h<0$ " " $c \in (x_0+h, x_0)$]

$\Big\}$ esiste un c appartenente all'interv. di estremi x_0, x_0+h

tale che

$$(\nabla) \quad \boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}.}$$

- Si dimostra di passo in passo come visto sopra.
- Come potrebbe venirmi in mente che ci sono quegli "STRANI COEFFICIENTI"?

Proviamoci con un polinomio!

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ in $x_0 = 0$ vale 1

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2$ " vale 1

$f''(x) = 2 + 2\cdot 3x$ " vale $2 = 2!$

$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3$ " vale $3!$

I coefficienti dei monomi in $1+x+x^2+x^3$ sono tutti $=1$
$\Rightarrow$ per compensare i valori assunti dalle derivate devo dividere $f''(0)$ per $2!$ e $f'''(0)$ per $3!$
Analogamente se il grado del polinomio fosse n e i coefficienti fossero più generali.

DEFINIZIONI

1) la ($\blacktriangledown$) è detta formula di Taylor (con il resto nella forma di Lagrange) con punto iniziale x_0, arrestata all'ordine n

2) $R_{n+1}(h) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h^{n+1}$ è detto resto $(n+1)$-esimo
è la parte importante di ($\blacktriangledown$): stima quel che trascuro

3) $P_n(x_0, h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dfrac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$
è detto polinomio di Taylor con punto iniziale x_0 di grado n
Se non tutte le derivate sono nulle rappresenta un'approssimazione di $f(x_0+h)$ (quanto buona è chiarito da $R_{n+1}(h)$)

4) Se $x_0 = 0$ la ($\blacktriangledown$) diventa

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

(con $0 < c < h$ se $h > 0$ o $h < c < 0$ se $h < 0$)
e si parla di formula di McLaurin.

Dal teorema di Taylor emerge che approssimando

$f(x_0+h)$ con $P_n(x_0,h)$

ciò che si trascura è $o(h^n)$. Per usi pratici (CALCOLO di LIMITI) conviene ricordare anche questa forma del

TEOREMA di TAYLOR (forma di PEANO). Considero $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e $x_0\in(a,b)$. Se esistono $f', f'', \dots, f^{(n)}$ in x_0, per ogni $x_0+h\in(a,b)$ si può scrivere

(A) $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n)$

Questa è la cosidetta forma QUALITATIVA del Teor. di Taylor, mentre la precedente è QUANTITATIVA. Perché?

- Torno al calcolo di $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$

Miglioro l'approssimazione trovando la formula di McLaurin di e^x arrestata al II ordine (nella forma di Peano)

$f(x) = e^x$ in $x_0=0$ vale 1
$f'(x) = e^x$ "
$f''(x) = e^x$ "
$\Rightarrow e^h = 1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)$

Visto che $x\to 0$ sostituisco $h=x$ e trovo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2/2+o(x^2)-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

- Se invece voglio "calcolare" $e^{1/2}$ usando la sua approssimazione con il polinomio di McLaurin non è sufficiente rappresentare il resto così, perché voglio sapere se trascuro una parte troppo grande. So che $e^h = 1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{e^c}{3!}h^3$, $0<c<\frac{1}{2}$: posto $h=\frac{1}{2}$, $\frac{e^c}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{24}$: TROPPO?

Due modi di presentare il problema quantitativo

- Un modo è quello appena visto: se approssimo $e^{1/2}$ con $1+1/2+1/2\cdot(1/2)^2 = 13/8$ commetto un errore sicuramente $<\frac{1}{24}$ ma altrettanto sicuramente $>\frac{1}{48}$ poiché $c>0$ implica $R_3 = \frac{e^c}{48} > \frac{e^0}{48} = \frac{1}{48}$.

- Secondo modo: voglio migliorare questa approssimazione in modo che l'errore che commetto sia sicuramente $<1/100$.

La formula di McLaurin (nella forma di Lagrange) arrestata all'ordine n è

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots + \frac{h^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} h^{n+1}$$

ove, se $h=1/2$, si ha $0<c<1/2$ ($\Rightarrow$ posso sempre pensare $e^c<2$)

Devo trovare n in modo che

$$R_{n+1}(1/2) = \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{sia} < \frac{1}{100}$$

Vado per tentativi:

$n=2$ non va bene

$n=3$? $\quad R_4(1/2) = \frac{e^c}{4!}\cdot\frac{1}{16} < \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{8} < \frac{1}{100}$: $n=3$ va bene.

Cioè se scrivo $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}$ al posto di $e^{1/2}$ commetto un errore più piccolo di $\frac{1}{100}$ (ma $>\frac{1}{284}$) ....

Polinomio di Taylor di un polinomio $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n = A(x)$

Esistono tutte le possibili derivate. Notare in particolare che $A^{(n)}(x) = n!\,a_n$ e $A^{(n+1)}=0 \Rightarrow$ Per ogni $x_0\in\mathbb{R}$

$$A(x) = A(x_0) + A'(x_0)(x-x_0) + \frac{A''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{n!\,a_n}{n!}(x-x_0)^n + 0\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

Caso non polinomiale.

Calcoliamo i polinomi di MacLaurin di alcune funz. elementari, col resto nella forma di Peano (utili nel calcolo di $\boxed{\lim_{x\to 0}}$).

$$\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x}$$

$$f^{(2k)}(x) = \pm \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(2k)}(0) = 0$$

$$f^{(1+4k)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(1+4k)}(0) = 1$$

$$f^{(3+4k)}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(3+4k)}(0) = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Similmente:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + o(x^8)}$$

poiché $D(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $D^2(\operatorname{tg} x) = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$

$D^3(\operatorname{tg} x) = 2\frac{\cos^2 x + 3\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}$ etc. o (meglio) $D(\operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ ecc.

Ancora:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{Sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{Th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + o(x^8)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Fare le verifiche, ricordando che il punto iniziale è $x_0 = 0$.

Polin. di McLaurin di Tanx

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
0	$\tan x$	0	$\frac{0}{0!} = \frac{0}{1} = 0$
1	$1+(\tan x)^2$	$1+0=1$	$\frac{1}{1!} = \frac{1}{1} = 1$
2	$0+2\tan x\,(1+(\tan x)^2)$	$0+0=0$	$0/2! = 0$
3	$2\cdot\left[(1+(\tan x)^2)^2 + \tan x\cdot(2\tan x(1+\tan^2 x))\right]$	$2(1+0)=2$	$2/3! = \frac{1}{3}$

ecc.

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\arctan x$	0	0
1	$\dfrac{1}{1+x^2}$	1	1
2	$\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$	0	0
3	$-2\dfrac{(1+x^2)^{\cancel{2}}-x\cdot 2\cancel{(1+x^2)}\cdot 2x}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}$	-2	$\dfrac{-2}{3!}=\dfrac{-1}{3}$
	$=-2\cdot\dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$		
	ecc. ...		

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{Ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{Sh} x = \frac{1}{2} \Big(\cancel{1} + x + \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) +$$

$$- \cancel{1} + x - \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \Big)$$

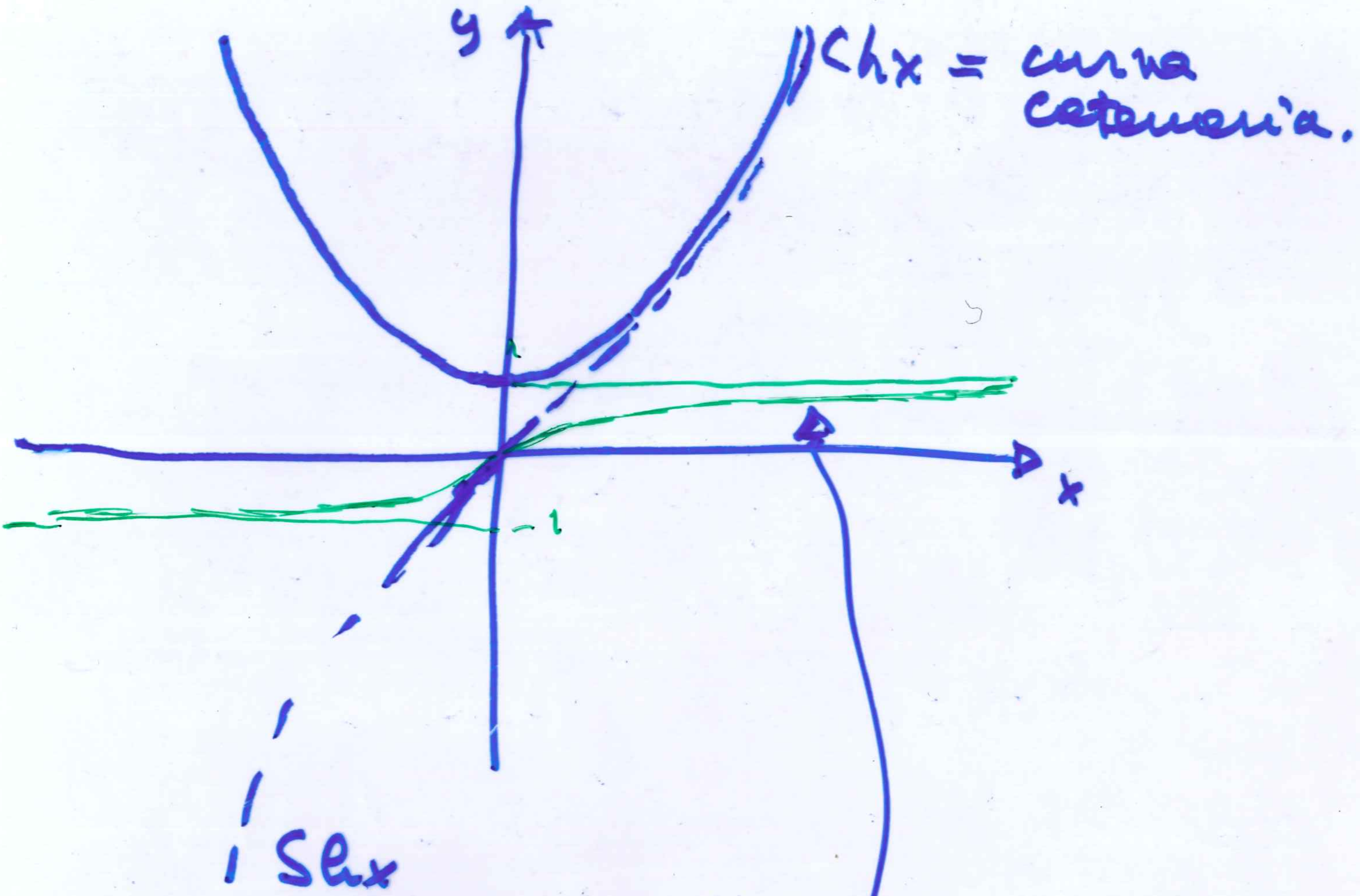
$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\operatorname{Sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} +$$

$$+ o(x^{2k+1})$$

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$$



$$\mathrm{Th}\,x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\ln(1+x)$	0	0
1	$\frac{1}{1+x}$	1	$\frac{1}{1!}=1$
2	$\frac{-1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2}$	-1	$\frac{-1}{2!}=\frac{-1}{2}$
3	$2(1+x)^{-3}$	2	$\frac{2}{3!}=\frac{1}{3}$
4	$-2\cdot 3(1+x)^{-4}$	$-3!$	$\frac{-3!}{4!}=-\frac{1}{4}$
5	$2\cdot 3\cdot 4(1+x)^{-5}$	$4!$	$\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$	$(-1)^{n-1}(n-1)!$	$\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + o(x) \quad (x\to 0)$$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$(1+x)^\alpha$	1	1
1	$\alpha(1+x)^{\alpha-1}$	α	$\alpha/1!$
2	$\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$	$\alpha(\alpha-1)$	$\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}$
3	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$	$\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$	$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$	$\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

NOTAZIONE: $\dbinom{\alpha}{n}$

se $\alpha = m \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\dots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{(1+x)\left(\ln(1+x)\right)^2} = ?$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - x}{\left(x + o(x)\right)^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} + x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^2) + \boxed{o(x^3)} - \cancel{x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{o(1)} = \frac{1}{2}$$

Mostrare che le formule di Maclaurin di

$\ln(1-x)$, $\sqrt{1+x}$, $\sqrt{1-x}$ arrestati al 3°

ordine sono rispettivamente

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

usando schemi analoghi a quelli visti nelle pagine precedenti

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0			
1			
2			
3			

e $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$

Limite a richiesta del 14/11

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{e}-\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right)$$

osservo che $\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \frac{1}{\left(\frac{1+x}{x}\right)^x} \longrightarrow \frac{1}{e}$ se

$x\to+\infty \Rightarrow$ F.I. $[\infty\cdot 0]$

I tentativo di SOLUZIONE

Sostituire $1+x=t$, $x=t-1$, $t\to+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty}(t-1)\left(\frac{1}{e}-\left(\frac{t-1}{t}\right)^{t-1}\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{t-1}{e}-\cancel{(t-1)}\cdot\frac{t}{\cancel{t-1}}\left(1-\frac{1}{t}\right)^t\right]=^{(*)}$$

$$=-\frac{1}{e}+\lim_{t\to+\infty} t\left(\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{t}\right)^t\right)$$

La traslazione non elimina il problema!

ATTENZIONE: È FALSO CHE DOPO (*) si possa scrivere

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{t-1}{e}-\lim_{t\to+\infty}t\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^t=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{e}-\frac{t}{e}\right)=\frac{-1}{e}$$

: ho solo "nascosto" la F.I. $[\infty-\infty]$ ma quel che trascuro nella somma non è $o(1)$.

Riproviamo con le approssimazioni polinomiali

II tentativo.

osservo che $\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = e^{x\ln\frac{x}{1+x}} = e^{-x\ln\frac{x+1}{x}} =$

$= e^{-x\ln(1+1/x)}$ e per $x\to+\infty$, $\frac{1}{x}\to 0$

Dalle formule di McLaurin so che per $t \to 0$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

quindi nel nostro caso:

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{per } x \to +\infty$$

e

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Dunque

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{e} - e^{-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(e^{-1} - e^{-1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -e^{-1}x \cdot \left(e^{\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} - 1\right) =$$

Lavoro con un prodotto, quindi è lecito sostituire un asintotico e visto che $\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ per $x \to +\infty$ e $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$

$$= \lim_{x \to +\infty} -e^{-1}x \cdot \left(\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= -e^{-1} \cdot \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = -\frac{1}{2e}$$

dato che $o(1) \to 0$

L'esempio spiega come tener conto degli "o piccolo", cioè dei termini che trascuro, è fondamentale e come spesso l'utilizzo garibaldino dei limiti e della loro additività, moltiplicatività ecc. (senza verificare che valgano le giuste ipotesi) sia fuorviante.

III tentativo: de l'Hospital ... con molta ARTE

Osservo innanzitutto che devo passare dalla forma $[0\cdot\infty]$ alla forma $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ... quattro conti mi dissuadono.

Ma potrei rileggere

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{-1}-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}\right) \quad \text{ponendo } t=\frac{1}{x}$$

come

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left(e^{-1}-\frac{1}{(1+t)^{1/t}}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left(e^{-1}-(1+t)^{-1/t}\right)$$

uso d.l'H. su questa forma $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$(1+t)^{-1/t}=e^{-\frac{1}{t}\ln(1+t)}$$

$$\left(-\frac{1}{t}\ln(1+t)\right)'=\frac{\ln(1+t)}{t^2}-\frac{1}{t(t+1)}$$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{0-(1+t)^{-1/t}\left(\frac{\ln(1+t)}{t^2}-\frac{1}{t(t+1)}\right)}{1}=$$

$$=\left[\lim_{t\to0^+}-(1+t)^{-1/t}\right]\left[\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{\ln(1+t)}{t}-\frac{1}{t+1}}{t}\right]\overset{H}{=}$$

il 2° fattore è ancora una $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$=-e^{-1}\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{t(1+t)}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}+\frac{1}{(1+t)^2}}{1}=$$

$$=-e^{-1}\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t)t+t^2-(1+t)^2\ln(1+t)}{t^2(1+t)^2}=$$

$$\boxed{(1+t)^2\to1}$$

$$=-e^{-1}\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{t+2t^2-(1+t)^2\ln(1+t)}{t^2}\overset{H}{=}$$

$$=-e^{-1}\lim_{t\to0^+}\frac{1+4t-2(1+t)\ln(1+t)-\frac{(1+t)^2}{1+t}}{2t}=$$

$$\boxed{\frac{2(1+t)}{2}\cdot\frac{\ln(1+t)}{t} \text{ con } t\to0}$$

$$=-e^{-1}\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{3t-2(1+t)\ln(1+t)}{2t}=-e^{-1}\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)=-\frac{1}{2e}$$