$$\ln(1-x) \qquad x_0=0$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

$$\boxed{-x = t} \qquad t(x) = -x$$ derivabile infinite volte in $x_0=0$

$$\ln(1-x) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o(x^3)$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \qquad x_0=0$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \left(-\frac{1}{8}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1-x^2+5x^4}{(4\,\text{sen}\,2x+x^3)^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$e^{x^2}-1 = x^2+o(x^2) \Rightarrow$$

$$e^{x^2}-1-x^2+5x^4 = x^2+o(x^2)-x^2+5x^4=$$

$$= o(x^2) \quad ??$$

$$\text{sen}\,2x = 2x+o(x)$$

$$4\,\text{sen}\,2x+x^3 = 8x+o(x)+x^3 = 8x+o(x)$$

Devo raffinare il numeratore

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

$$e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$$

$$\text{NUM.} = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)-1-x^2+5x^4=$$

$$= \frac{11}{2}x^4+o(x^4)$$

Sostituisco nel limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{11}{2}x^4+o(x^4)}{(8x)^3} = \frac{11}{2^{10}} \lim_{x\to 0} [\overbrace{x+o(x)}^{\to 0}] = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x}) - e^{\sqrt{x}} + 1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

• posso applicare McLaurin?

* $\sqrt{x}$ è derivabile in $x_0 = 0$?

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

* <u>NO</u>

• <u>NO</u>

Posso usare una sostituzione!

$\sqrt{x} = t$

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\ln(1+t) - e^{t} + 1}{t^2} =$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{\left(\cancel{t} - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) + \cancel{1} - \left(\cancel{1} + \cancel{t} + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)}{t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{-t^2 + o(t^2)}{t^2} = \underline{-1}$$

Torniamo a

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{(1+x)(\ln(1+x))^2} .$$ Risulta $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Sostituisco questa approssimazione migliore solo dove serve:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(x - x^2/2 + o(x^2)) - x}{(1+x)\, x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 - x^2/2 - x^3/2 + o(x^2) - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Notare che $-x^3/2 = o(x^2)$ e quindi è stato "dimenticato"

Altro esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2 + 5x^4}{(4\,\text{sen}\,2x + x^3)^3} :$$ approssimo $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$

$\text{sen}\,2x = 2x + o(x)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + o(x^2) - 1 - x^2 + 5x^4}{(4\cdot 2x + o(x) + x^3)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^4 + o(x^2)}{(8x + o(x))^3}$$

ATTENZIONE: $x^4 = o(x^2) \Rightarrow 5x^4 + o(x^2) = o(x^2)$

Approssimazione insufficiente al numeratore

$\Rightarrow$ approssimo meglio: $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

Il limite diventa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4/2 + 5x^4 + o(x^4)}{8^3 x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{11/2\, x^4}{8^3\, x^3} = 0.$$

Una conseguenza dei teoremi di Taylor.

Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ammette derivate $f', \dots, f^{(n)}$ in un intorno di x_0 e $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ma $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,

se n è pari e
- $f^{(n)}(x_0) > 0$: x_0 è pto di minimo rel.
- $f^{(n)}(x_0) < 0$: x_0 " " massimo rel

Se n è dispari f ha in x_0 un punto di flesso a tg orizz.

Infatti $f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n + o(h^n) \dots$

DIM.

$f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\exists\ f', \dots, f^{(n)}$ in un intorno di $x_0 \Rightarrow$

Vale Teor. di Taylor con il resto nella forma di Peano:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{1!} + \dots + f^{(n-1)}(x_0)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n)$$

Per ipotesi $f'(x_0) = 0 = \dots = f^{(n-1)}(x_0)$

$$\Rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n)$$

Che cosa succede in un intorno di x_0?

$$\Delta = f(x_0+h) - f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n)$$

$\boxed{n \text{ pari}} \Rightarrow h^n > 0$ il segno di Δ è lo stesso del segno di $f^{(n)}(x_0)$

$\Rightarrow$ se $f^{(n)}(x_0) > 0$: minimo relativo

se $f^{(n)}(x_0) < 0$: max rel.

$\boxed{n \text{ dispari}}$ $h^n > 0$ se $h > 0$

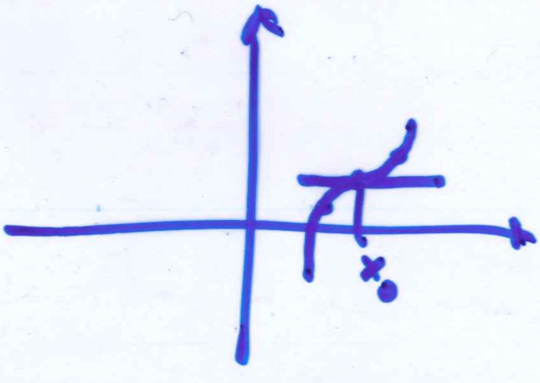
$h^n < 0$ se $h < 0$

se $\underline{f^{(n)}(x_0) > 0}$, $h > 0$

$f(x_0+h) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0+h) > f(x_0)$

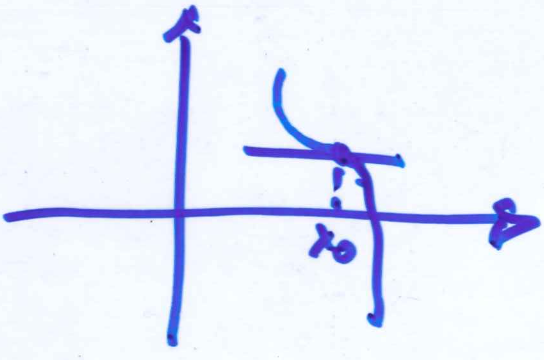
$h < 0$

$f(x_0+h) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0+h) < f(x_0)$



flesso ascend. a tang. orizz.

se $\underline{f^{(n)}(x_0) < 0}$



flesso disc. a tang. orizz.

Esercizi. Calcolare i seguenti limiti

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen} x^2}{(1-\cos x^2)^2}$$

2) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x}{3x^2}$$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^6}\left(\operatorname{arctg}^2 x - x^2 + \frac{2}{3}x^4\right)$$

Determinare il polinomio di Taylor di $\ln x$ di 3° grado con punto iniziale $x_0 = 2$

Usando la formula di McLaurin con il resto nella forma di Lagrange valutare $\operatorname{sen} \frac{1}{3}$ in modo che l'errore commesso sia $< \frac{1}{10^3}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen} x^2}{(1-\cos(x^2))^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

DEN:

$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ $\quad t = x^2$

$\cos x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

$1 - \cos x^2 = \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

$(1-\cos x^2)^2 = \frac{1}{4}x^8 + o(x^4)\cdot\frac{2}{2}x^4 + (o(x^4))^2 =$

$= \frac{1}{4}x^8 + o(x^8) + (o(x^4))^2 =$

$= \frac{1}{4}x^8 + o(x^8)$

NUM $\quad \operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$, $\quad t = x^2$

$\operatorname{sen} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^6)$

$x^2 - \operatorname{sen} x^2 = \frac{x^6}{3!} + o(x^6)$

$\boxed{\frac{1}{24}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen} x^2}{(1-\cos x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6/3!}{x^8/4} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)-2x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]}$$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

$t = 2x \to 0$. Sostituisco $t = 2x$

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) =$$

$$= 2x - 2x^2 + o(x^2)$$

$$\text{Num} = \cancel{2x} - 2x^2 + o(x^2) - \cancel{2x}$$

$$\boxed{= \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2+o(x^2)}{3x^2} = -\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left((\arctan x)^2 - x^2 + \frac{2}{3}x^4\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad \text{BASTA?}$$

$$(\arctan x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 =$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{x^6}{9} + 2x\,o(x^3) - \frac{2}{3}x^3 o(x^3) + (o(x^3))^2 =$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{x^6}{9} + o(x^4) + o(x^6) =$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \qquad \text{NON BASTA}$$

$$(\arctan x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right)^2 =$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{2x^6}{5} + 2x\,o(x^5) + \frac{x^6}{9} + \frac{2}{15}x^8 + o(x^8) + \frac{x^{10}}{25} + o(x^{10}) + (o(x^{10}))$$

non scrivo gli addendi del quadrato di ordine $> x^6$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left((\arctan x)^2 - x^2 + \frac{2}{3}x^4\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left(x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{23x^6}{45} + o(x^6) + \right.$$

$$\left. - x^2 + \frac{2}{3}x^4\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left(\frac{23}{45}x^6 + o(x^6)\right) =$$

$$= \frac{23}{45}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - x - 1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 + o(x^3)$$

Dovrei scrivere $o\left(\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2\right)$ ma se $x \to 0$

$$\frac{f(x)}{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2} = \frac{f(x)}{x^2 \underbrace{\left(1 - \frac{x}{3!}\right)^2}_{\to 1}}$$

Quindi l'approssimaz. al 2° ordine è :

$$e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^{\operatorname{sen} x} - x - 1 = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+(\operatorname{sen} x)^2} - 1}{x \operatorname{sen} x} =$$

$$\operatorname{sen} x = x - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + o(x^3)$$ MA NON SERVIRÀ

$$= x + o(x)$$

$$(\operatorname{sen} x)^2 = x^2 - \cancel{\frac{1}{3}x^4} + o(x^4)$$ IDEM!

$$= x^2 + o(x^2)$$

uso l'asintotico per $t \to 0$ $(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}(\operatorname{sen} x)^2}{x \cancel{\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^2-1}-\sqrt[4]{x^2+3x+1}\right)=$$

1°) $\sqrt[4]{x^2-1}=\sqrt[4]{x^2}\,\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}$ $\qquad \frac{1}{x^2}\to 0$

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{1/4}=1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Solita appross. al 1° ord.

2°) $\sqrt[4]{x^2+3x+1}=\sqrt{x}\,\sqrt[4]{1+\frac{3x+1}{x^2}}$ $\qquad \frac{3x+1}{x^2}\to$

$$\left(1+\frac{3x+1}{x^2}\right)^{1/4}=1+\frac{1}{4}\left(\frac{3x+1}{x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\sqrt[4]{x^2-1}-\sqrt[4]{x^2+3x+1}=$$

$$=\sqrt{x}\left(\cancel{1}-\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-\cancel{1}-\frac{1}{4}\,\frac{3x+1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\sqrt{x}\left(-\frac{3x+1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=-\frac{3x+1}{4x\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=$$

$$=-\frac{3}{4\sqrt{x}}-\frac{1}{4x\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\longrightarrow 0^-$$