$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\boxed{x-1=t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt[3]{1+t}-1} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{1}{3}t} = \qquad \begin{array}{l} \ln(1+t) \sim t \\ \sqrt[3]{1+t}-1 \sim \frac{1}{3}t \end{array}$$

$$= 3$$

LIMITE da MAT ASS. a richiesta.

Primitive

Abbiamo visto che data una funzione continua $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ le sue primitive su $[a,b]$ si possono ottenere tutte da una nota pur di aggiungere una costante (e quindi sono tante quanti i numeri reali)

Come calcolare le primitive?

a) PRIMITIVE ELEMENTARI **(Riassunte in P1.4)**

- $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ $\Rightarrow$ una primitiva di x^β (se $\beta \neq -1$) è $\dfrac{x^{\beta+1}}{\beta+1}$

Vedi P1.1 - P1.2

- $D(\ln|x|) = \dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow$ una primitiva di x^{-1} è $\ln|x|$
- $D(e^x) = e^x$ $\Rightarrow$ " " " e^x è e^x
- $D(a^x) = \ln a \cdot a^x$ $\Rightarrow$ " " " a^x è $\dfrac{a^x}{\ln a}$

VEDI P1.3

- $D(\operatorname{sen} x) = \cos x$ $\Rightarrow$ " " " $\cos x$ è $\operatorname{sen} x$
- $D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$ $\Rightarrow$ " " " $\operatorname{sen} x$ è $-\cos x$
- $D(\operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\Rightarrow$ " " " $1+\operatorname{tg}^2 x$ è $\operatorname{tg} x$
  $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ "
- $D(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\Rightarrow$ una " " $\dfrac{1}{1+x^2}$ è $\operatorname{arctg} x$

b) <u>Metodi di integrazione</u>: sono riletture delle principali regole di derivazione: **VEDI P1.5**

- derivazione della somma
- per scomposizione $\Leftarrow$ derivazione del prodotto per un numero
- per parti $\Leftarrow$ derivazione del prodotto di funzioni
- per sostituz. $\Leftarrow$ derivazione di funzione composta.

x^{β} $\qquad$ $(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$

una prim. di x^{β} avrà la forma

$k\, x^{\beta+1}$

chi è k? Derivo

$k \cdot (\beta+1)\, x^{\beta} = x^{\beta} \iff k = \frac{1}{\beta+1}$

$\boxed{\beta+1 \neq 0}$ ok.

se $\beta+1=0$ ho sbagliato primitiva

$\Updownarrow$ Infatti:

$\boxed{\beta=-1}$: $x^{\beta} = \frac{1}{x}$ e quindi

prim. : $\ln|x|$ cioè se sto

considerando la funz $\frac{1}{x}$ con

dominio $(0,+\infty)$ la primit. è $\ln x$

se con " $(-\infty, 0)$ " " è $\ln(-x)$

Problema: determinare la primitiva di $\frac{1}{x}$ che in $x_0 = -3$ vale 1

$f(x)$ in questo problema è continua in $(-\infty, 0)$

poiché $x_0 = -3 \in (-\infty, 0)$

e devo trovare una prim. di $f(x)$ che sia definita in x_0 (e quindi in $(-\infty, 0)$)

$\Rightarrow$ una prim. di $\frac{1}{x}$ relativa a qs problema è

$$\ln(-x)$$

In generale tutte le prim. def. su $(-\infty, 0)$ sono $\ln(-x) + c = F(x)$

Quando $F(-3) = 1$? $\ln(3) + c = 1$

$\Rightarrow$ $c = 1 - \ln 3$. SOSTITUISCO

a^x una primitiva? sarà

$k a^x$: derivo $k \ln a \, a^x = a^x$

$k \ln a = 1$

$k = \frac{1}{\ln a}$

$$\left(\frac{1}{\tan x}\right)' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{-(\operatorname{sen} x)^2 - (\cos x)^2}{(\operatorname{sen} x)^2} =$$

$$= \frac{-1}{(\operatorname{sen} x)^2} = -1 - \left(\frac{1}{\tan x}\right)^2$$

Una primitiva di $\frac{1}{(\operatorname{sen} x)^2}$ è

$-\frac{1}{\tan x}$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$

<u>L'insieme</u> di tutte le primitive di f

$\{ F : (a,b) \to \mathbb{R} \mid F' = f \}$ viene

detto <u>integrale</u> INDEFINITO di f:

$$\int f(x)\,dx = \{ F + c,\ c \in \mathbb{R} \mid F' = f,\ F : (a,b) \to \mathbb{R} \}$$

$= F + c \quad c \in \mathbb{R}$

$$\int x^{\beta}\,dx = \frac{1}{\beta+1}\,x^{\beta+1} + c \quad c\in\mathbb{R}$$

se $\beta \neq -1$

$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c \quad \text{con } c\in\mathbb{R}$$

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + c \quad \text{con } c\in\mathbb{R}$$

$$\int a^{x}\,dx = \frac{1}{\ln a}\,a^{x} + c \quad \text{con } c\in\mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c \quad \text{con } c\in\mathbb{R}$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c \quad \text{con } c\in\mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + c \quad \text{''}$$

$$\int \frac{1}{(\operatorname{sen} x)^2}\,dx = \frac{-1}{\tan x} + c \quad \text{''}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsen x + c$$

Ricordare

a) $(af(x)+bg(x))' =$ $\quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

$= af'(x) + bg'(x)$:

b) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

c) $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

"calcolare le primitive" si dice "integrare"

"metodi x calcolare le primit." si chiamano "metodi di integrazione"

a) → Metodo x SCOMPOSIZ.

b) → " x PARTI

c) → " x SOSTITUZIONE

I) <u>Integrazione per scomposizione</u>

se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe definite su $[a,b]$ e hanno ivi primitiva $F(x)$ e $G(x)$ allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ una primitiva di $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è $\alpha F(x) + \beta G(x)$.

ES. 1) Una primitiva di $x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ è

e in generale una primitiva del polinomio
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
è

VEDI P2.1

Es. 2) Una primitiva di $(\operatorname{tg} x)^2 = 1 + (\operatorname{tg} x)^2 - 1$ è

Es. 3) Una primitiva di $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$

è ...

N.B. Per indicare l'insieme di TUTTE le primitive di $f(x)$ si usa scrivere $\int f(x)\,dx$: questa scrittura prende nome di <u>integrale indefinito di $f(x)$</u>
Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$
$$\int f(x)\,dx = \{ F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x) \}$$
o più brevemente $= F(x) + c$

Esercizi. Calcolare:

VEDI P2.3 - P2.4

• $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x}{x^2-1}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$, • $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$,

• $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$

occhio al dominio VEDI P2.2

$$\int (x^3 - 4x^2 + 3x - 1)\,dx =$$

$$= \int x^3 dx - 4\int x^2 dx + 3\int x\,dx - \int 1\,dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 4\,\frac{x^3}{3} + 3\,\frac{x^2}{2} - x + c$$

$$\int (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)\,dx =$$

$$= a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int (\tan x)^2 dx = \int \left[\left(1 + (\tan x)^2\right) - 1\right] dx =$$

$$= \int \left(1 + (\tan x)^2\right) dx - \int dx =$$

$$= \tan x - x + c$$

$$\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x)^2 (\cos x)^2} = \int \frac{(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2}{(\operatorname{sen} x)^2 (\cos x)^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{\cancel{(\operatorname{sen} x)^2}\,dx}{\cancel{(\operatorname{sen} x)^2}(\cos x)^2} + \int \frac{\cancel{(\cos x)^2}}{(\operatorname{sen} x)^2 \cancel{(\cos x)^2}}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(\cos x)^2} + \int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x)^2} = \tan x - \frac{1}{\tan x} + c$$

$$\int \frac{3x^2+3x}{x^2-1}\,dx$$

I.D. della funzione INTEGRANDA $f(x)$:

$x \neq \pm 1 \implies f(x)$ è continua
in $(-\infty,-1)$
e in $(-1,1)$
e in $(1,+\infty)$

$$\frac{3x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \begin{cases} \dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{3(x-1)+3}{x-1} = 3+\dfrac{3}{x-1} \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{3x^2+3x}{x^2-1}\,dx = \int\left(3+\frac{3}{x-1}\right)dx = \quad \begin{pmatrix}\text{con}\\ x\neq -1\end{pmatrix}$$

Per scomp. $= 3x + 3\displaystyle\int \frac{dx}{x-1} = \begin{cases} 3x+3\ln|x-1|+c \\ x \neq -1 \end{cases}$

Le primitive sono:

in $(-\infty,-1)$ $\quad 3x+3\ln(1-x)+c$
in $(-1,1)$ $\quad$ stessa legge $\nearrow$
in $(1,+\infty)$ $\quad 3x+3\ln(x-1)+c$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

ID: $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$

Continuità sui singoli intervalli.

$$\boxed{\frac{1}{x^2-1}} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x^2-1)} =$$

$$= \boxed{\frac{x(A+B)+B-A}{x^2-1}}$$

La I e l'ultima fraz. sono = se e solo se

$$1 = x(A+B) + B-A$$

pol. di grado 0 $\Rightarrow$ anche lui

termine noto = 1

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B-A=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-B \\ 2B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=1/2 \\ A=-1/2 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}\right)dx = \text{per scomp}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + c =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$$

se $x \in (-\infty, -1)$ la primit. hanno la forma:

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + c$$

se $x \in (-1, 1)$ "

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{x+1} \right) + c$$

se $x \in (1, +\infty)$ "

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + c$$

II. Integrazione per parti

Ricordo che $\quad (fg)' = f'g + fg'$

$$\Rightarrow fg' = (fg)' - f'g$$

usando la scomposizione

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{fattor finito}} \underbrace{g'(x)\,dx}_{\text{fattor differenziale} \dots = dg} = \underbrace{\int [f(x)\,g(x)]'\,dx}_{f(x)\,g(x)} - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

: COME SCEGLIERLI?

ESEMPI

1) $\int \log_e x \, dx =$ **P3.2**

2) $\int \cos^2 x \, dx =$

3) $\int x \cos x \, dx =$ **P3.2**

4) $\int x e^x dx =$ **P3.1**

5) $\int e^x \cos x \, dx =$ **P3.4**

2 VIE

6) $\int x^\alpha \ln x \, dx =$ 1° caso : $\alpha = -1$ — **P3.3**

2° caso : $\alpha \neq -1$

$$\int x e^x dx$$

TENTATIVI

$$(e^x)' = e^x \qquad \int e^x dx = e^x + c$$

$$(x)' = 1 \qquad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow$$

Quale di queste scelte rende + facile il II integrale qui?

$$\int f g' dx = fg - \int f' g\,dx$$

$f' = (x)' = 1$

$g' = e^x$

$f(x) = x \qquad g'(x) = e^x$

$f'(x) = 1 \qquad g(x) = e^x$

Sostituisco:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx =$$

$$= x e^x - e^x + c$$

$$\int \underbrace{x}_{\text{F.F.}} \underbrace{\cos x \, dx}_{\text{FATT. DIFF}} =$$

$$\int f g' \, dx = fg - \int f' g \, dx$$

$f(x) = x \qquad g'(x) = \cos x$

$f'(x) = 1 \qquad g(x) = \operatorname{sen} x$

$$\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x - \int 1 \cdot \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= x \operatorname{sen} x + \int (-\operatorname{sen} x) \, dx =$$

$$= x \operatorname{sen} x + \cos x + c$$

$$\int \ln x \, dx \overset{?}{=} \int \underbrace{\ln x}_{\text{FF}} \cdot \underbrace{(1) \, dx}_{\text{FD}} = \quad \text{P.P.}$$

$f(x) = \ln x \qquad g'(x) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = x$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= x \ln x - x + c.$$

$$\int x^\alpha \ln x \, dx =$$

$$f(x) = \ln x \qquad g'(x) = x^\alpha$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \begin{cases} \alpha \neq -1 : \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \\ \alpha = -1 : \ln|x| \end{cases}$$

ma $x>0$ per l. D. INTEGRANDA

$\boxed{\text{Caso } \alpha \neq -1}$

$$\int \underset{FF}{x^\alpha} \ln x \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx =$$

FD

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha dx =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{1}{(\alpha+1)^2} x^{\alpha+1} + c$$

$\boxed{\text{Caso } \alpha = -1}$

$$\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \ln x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \ln x \, dx$$

$$A = (\ln x)^2 - A \iff 2A = (\ln x)^2$$

$A = \dfrac{(\ln x)^2}{2}$ è una primitiva

$$\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

$$\int e^x \cos x \, dx \overset{PP}{=}$$

posso scegliere FF FD come voglio.

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = -\operatorname{sen} x & g(x) = e^x \end{array}}$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \overset{PP}{=}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{sen} x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = \cos x & g(x) = e^x \end{array}}$$

$$= e^x \cos x + \left[e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx \right] =$$

$$= e^x (\cos x + \operatorname{sen} x) - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\Rightarrow$$

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x (\cos x + \operatorname{sen} x) + c_1$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = e^x \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{2} + c$$

Rifarlo scegliendo e^x come F.F.