TEOR. di LAGRANGE

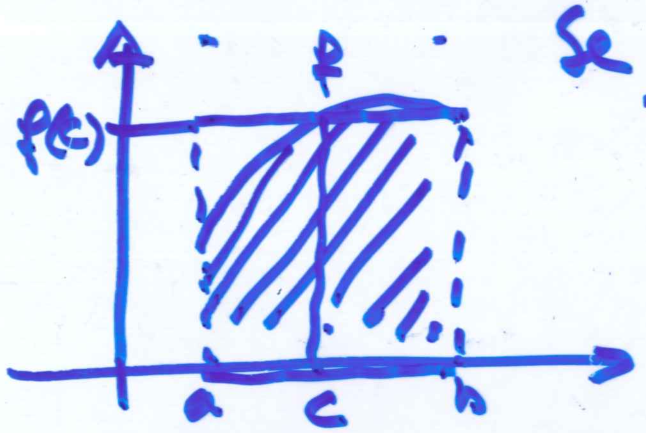
= TEOR. della MEDIA DIFFEREN-ZIALE

Ora invece vedremo il

TEOR. della MEDIA INTEGRALE

(o del valor medio).

Domanda "geometrica":



Se $\underline{f(x) > 0}$ in $[a, b]$ e quindi $\int_a^b f(x)\,dx$ "è l'area del trapezoide"

$\exists\; c \in [a, b]$ tale che l'area del rettangolo di base $(b-a)$ e altezza $f(c)$ è $= \int_a^b f(x)\,dx$?

Risponde il <u>teor della media integrale</u>:

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua in $[a,b]$. Allora esiste un $c \in (a,b)$ t.c.

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(c)$$

(anche se f non è ≥ 0 su tutto $[a,b]$ e quindi l'integrale non rappresenta un'area).

dim. Valgono i teor. per le funz. cont. su chiusi limitati.
In part. (WEIERSTRASS) $f(x)$ ha MAX. e min. assoluto in $[a,b]$
M m

e quindi

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a,b].$$

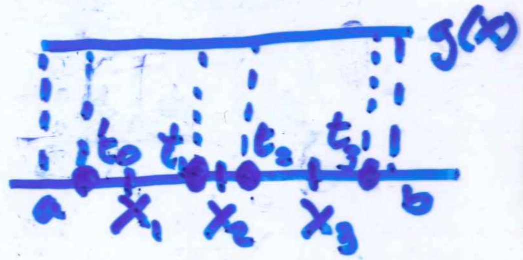
Per la proprietà 5 sugli integrali:

$$(*) \quad \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

Ora, chi è $\int_a^b m\,dx$? Sia $g(x)=m$

Ripenso alla definizione di integrale:

$$S_n(g) = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) =$$



$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(m) =$$

$$= \frac{b-a}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}\cdot m = (b-a)m \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(g) = (b-a)m$$

Cioè $\int_a^b m\,dx = (b-a)m$

Idem per M. Quindi la disug. (*) diventa:

$$(b-a)m \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)M$$

$b>a \Rightarrow$ posso dividere per $(b-a)$ senza variare il senso

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

Allora (T. dei val. intermedi per le funz. continue su un chiuso limitato) esiste $c \in (a,b)$ t.c.

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

cioè

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$

c.v.d.

Ne deriva il TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO

(lega il CALCOLO differenziale e il CALCOLO integrale)

Per enunciarlo dobbiamo introdurre il suo soggetto:

la FUNZIONE INTEGRALE

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Osservo che per ogni $c\in[a,b]$ e $\forall z\in[a,b]$ esiste

$$\int_c^z f(x)dx = F(z)$$

(può essere $c<z$ ed è l'int. di Cauchy-Riemann di $f(x)$ in $[c,z]$ oppure $c\geq z$ e allora è l'opposto dell'INT. di CAUCHY-RIEMANN in $[z,c]$)

Chiamo $F(z)$: funzione integrale di $f(x)$ con "estremo inferiore di integrazione" in c.

Penso c fissato in $[a,b]$
z variabile in $[a,b]$

e quindi davvero $\int_c^z f(x)dx$ è una funzione dell'estremo superiore di integrazione z: $F: z\mapsto\int_c^z f(x)dx$.

TEOR. FOND. del CALCOLO. Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, $c \in [a,b]$ fissato, $z \in [a,b]$ variabile. Allora la funz. integrale

$$F(z) = \int_c^z f(x)\,dx$$

è derivabile in (a,b) e $\forall z_0 \in (a,b)$

$$F'(z_0) = f(z_0).$$

<u>Cioè</u> $F(z)$ è una primitiva di $f(z)$.

- Questo teorema garantisce che se f è cont. in $[a,b]$ una primitiva l'ha: la sua funzione integrale.
- Le conseguenze del Teor. di Lagrange dicono che se $G(z)$ è un'altra primitiva di $f(z)$ allora $F(z) - G(z)$ è una costante k....

COROLLARIO. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$$

ove $G(z)$ è una qualunque primitiva di $f(z)$: So come calcolare un integrale in modo esatto, se conosco una primitiva!

<u>Dim. corollario</u>

Per il T.F.C. $F(z)=\int_c^z f(x)\,dx$ è una primitiva di $f(z)$ e quindi se $G(z)$ è un'altra prim., $\exists\, k\in\mathbb{R}$ t.c.

$$F(z)-G(z)=k$$

$$F(z)=G(z)+k$$

So che $F(c)=\int_c^c f(x)\,dx=0$

$$F(c)=0=G(c)+k \Rightarrow k=-G(c)$$

Quindi $\int_c^z f(x)\,dx = G(z)-G(c)$.

Per $z=b$, $c=a$: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$

c.v.d.

Dim. teo fond. Calcolo.

$$F(z) = \int_c^z f(x)\,dx$$: devo provare che è derivabile in ogni $z_0 \in (a,b)$

Trovo il rapporto incrementale

$$\frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} = \frac{\int_c^{z_0+h} f(x)dx - \int_c^{z_0} f(x)dx}{h}$$

Per il teo di additività degli estremi di integrazione

$$\int_c^{z_0+h} f(x)\,dx = \int_c^{z_0} f(x)dx + \int_{z_0}^{z_0+h} f(x)dx$$

$$\Rightarrow F(z_0+h) - F(z_0) = \int_{z_0}^{z_0+h} f(x)dx$$

Per il teo. della media integrale se $h>0$ e quindi $z_0+h > z_0$ esiste $t \in (z_0, z_0+h)$ t.c.

$$\int_{z_0}^{z_0+h} f(x)\,dx = (z_0+h-z_0)\, f(t) =$$
$$= h \cdot f(t).$$

Se $h<0$ cioè $z_0+h<z_0$

$$\int_{z_0}^{z_0+h} f(x)\,dx = -\int_{z_0+h}^{z_0} f(x)\,dx =$$

T. Medio I.: $\exists\, t\in(z_0+h, z_0)$ tale che:

$$= -\left[f(t)\left(z_0-(z_0+h)\right)\right] =$$

$$= -f(t)(-h) = h\,f(t).$$

Quindi la descrizione dell'integrale non dipende dal segno di h. Ora calcolo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_{z_0}^{z_0+h} f(x)\,dx}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot f(t)}{\cancel{h}} =$$

visto che t sta o in (z_0, z_0+h) o in (z_0+h, z_0). Se $h\to 0$ si ha $t\to z_0$

$$= \lim_{t\to z_0} f(t) =$$

poiché $f(t)$ è continua in $[a,b]$ e in particolare in z_0

$$= f(z_0)$$

cioè esiste $F'(z_0)$ e vale $f(z_0)$.

c.v.d.

ESERCIZIO 1

Calcolare

$$\int_0^1 \frac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}\,dx$$

$f(x) = \dfrac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}$ è continua in $[0,1]$?

In part. il denominatore è $\neq 0$?

In $[0,1]$ $4e^x$ è monot. cresc.
min: 4, max $4e$
$2x^2$ è crescente
min: 0, max 2
-1 cost.
La somma è monot. cresc.
Al minimo vale $4+0-1=3$
cioè è sempre $\neq 0$.

Possiamo applicare il coroll. del T.F.C.

1°) Calcolo una primitiva $G(x)$

2°) $G(1)-G(0)$ è l'integrale.

1°)

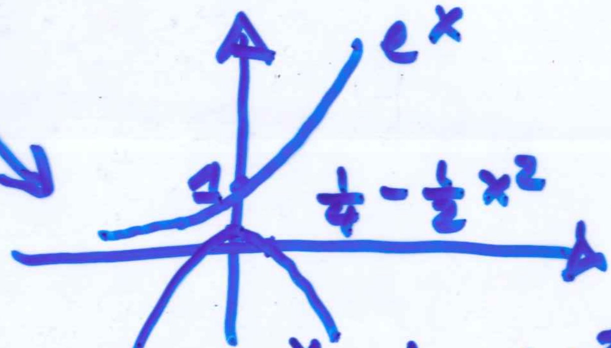
$$\int \frac{e^x + x}{4e^x + 2x^2 - 1}\,dx \qquad : \boxed{\begin{aligned}&(4e^x + 2x^2 - 1)' = \\ &= 4e^x + 4x\end{aligned}}$$

$$\parallel$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{(4e^x + 2x^2 - 1)'}{4e^x + 2x^2 - 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left(4e^x + 2x^2 - 1\right) + c$$

non serve il valore assoluto poiché:



$$e^x > \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2$$

2°) $G(x) = \frac{1}{4} \ln\left(4e^x + 2x^2 - 1\right)$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = G(1) - G(0) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\ln(4e^1 + 2\cdot 1 - 1) + $$
$$ - \ln(4\cdot e^0 + 2\cdot 0 - 1)\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln(4e+1) - \ln 3\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{4e+1}{3}\right)$$

ESERCIZIO 2

Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx$

$\arctan x$ è continua su $\mathbb{R}$ in part. è cont. in $[-1, \sqrt{3}]$

vale T.F.C.

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx = \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{-1}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(\sqrt{3} \arctan \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(1+3) \right) +$$

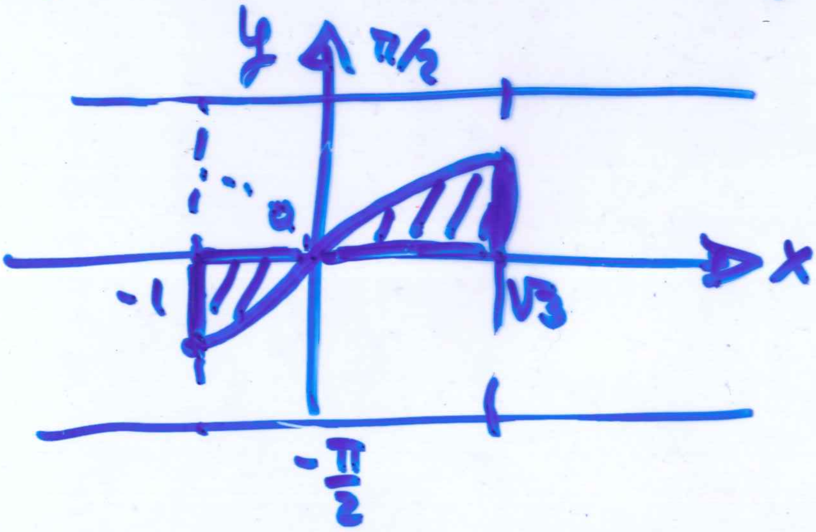
$$- \left(-1 \arctan(-1) - \frac{1}{2} \ln(1+1) \right) =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \ln 2^2 - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4} \right) \pi - \frac{1}{2} \ln 2$$

I6.4

Calcolare l'area della regione limitata del piano delimitata dal grafico di $f(x) = \arctan x$ dall'asse x e dalle rette di eq. $x = -1$, $x = \sqrt{3}$



$$\text{Area} = \int_{-1}^{0} (-\arctan x)\, dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx =$$

$$= \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{\sqrt{3}} +$$

$$- \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{1}{2}\ln 2^2 - 0 +$$

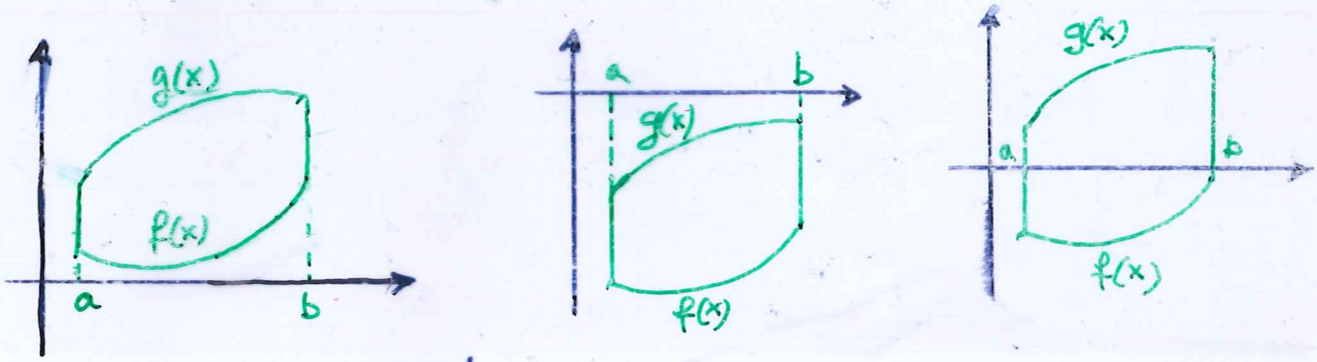
$$- \left(0 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{4}\right)\pi - \frac{3}{2}\ln 2.$$

In generale per calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici di 2 funzioni $f(x)$ e $g(x)$ con

$$f(x) \le g(x) \quad \text{in } [a,b]$$

e le rette $x=a$, $x=b$, CALCOLARE

$$\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$$



eccetera ...

Se i 2 grafici si intersecano corrispondentemente a $x=c$ e

$$g(x) \ge f(x) \quad \text{per } x \in [a,c]$$
$$g(x) \le f(x) \quad \text{per } x \in [c,b]$$

calcolare

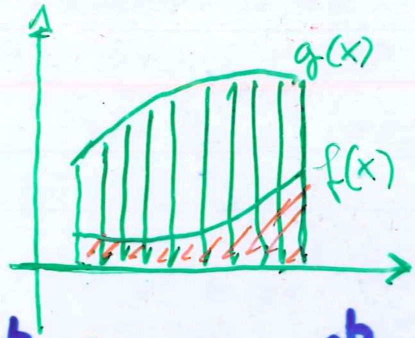
$$\int_a^c (g(x)-f(x))\,dx + \int_c^b (f(x)-g(x))\,dx$$

ALTRI ESEMPI (AREA di REGIONI SIMMETRICHE)

1. Calcolare l'area del trapezoide delimitato dall'asse x e dalla funzione $f(x)=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$ nell'intervallo $[-1,1]$.

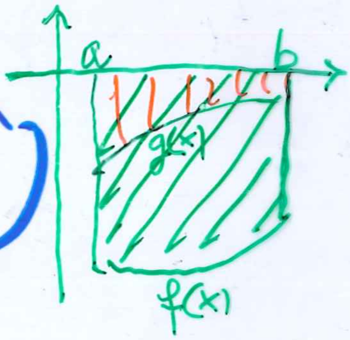
2. Calcolare l'area della regione di piano compresa tra $y=x^3$ e $y=x^5$ nell'intervallo $[-1,1]$.
COSA CAMBIA se scelgo l'INTERVALLO $[-1,2]$?

I



$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$$

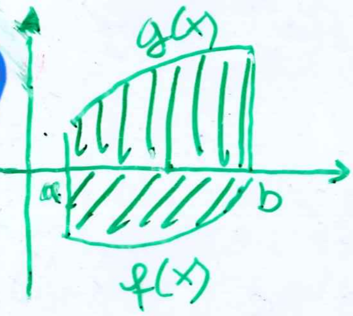
II



$$\int_a^b (-f(x))\,dx - \int_a^b (-g(x))\,dx =$$

$$= \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

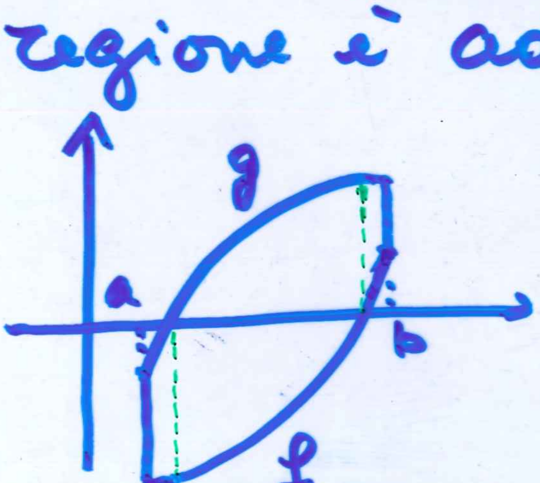
III



$$\int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b (-f(x))\,dx =$$

$$= \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

Quindi la formula vale in tutti i casi "fondamentali". Se poi la regione è ad es.



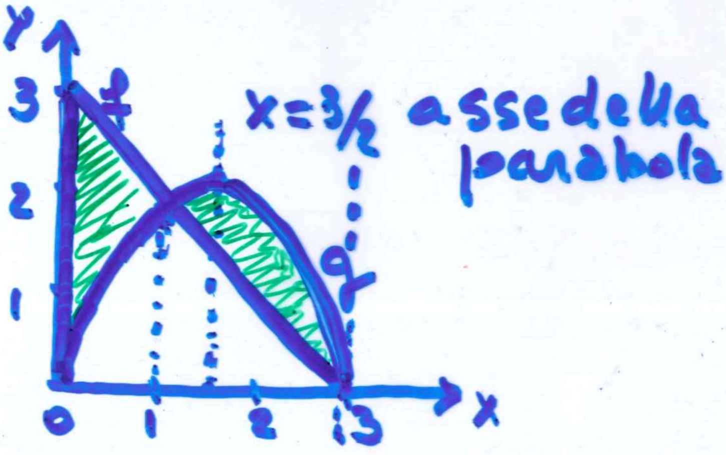
possiamo dividerla in 3 sottoregioni (rispettivamente caso II, III, I) e quindi si vede che la formula vale ancora

Area della regione limitata del piano racchiusa tra i grafici di

$$f(x) = 3 - x \quad e \quad g(x) = 3x - x^2$$

e le rette $x=0$, $x=3$.

TRACCIAMENTO della REGIONE R



$f(x) \le g(x) \Leftrightarrow$

$3 - x \le 3x - x^2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 4x + 3 \le 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x-3) \le 0 \Leftrightarrow$

$1 \le x \le 3$

ATTENZIONE: nel testo non si cita l'asse x come delimitazione. Quindi la regione è quella colorata in verde; $x=3$ serve solo per dire di non considerare i grafici per $x>3$; $x=0$ entra a far parte dei bordi della regione.

$$AREA = \int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx + \int_1^3 (g(x)-f(x))\,dx,$$

cioè, tenuto conto che $f(x)-g(x) = x^2-4x+3$,

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x^2-4x+3)\,dx + \int_1^3 -(x^2-4x+3)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{3} - 2 + 3 - 0 - \left[(9-18+9) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right)\right] =$$

$$= 2 + 2/3 = 8/3$$

.... positiva e compatibile con l'essere R contenuta in quadrato 3×3