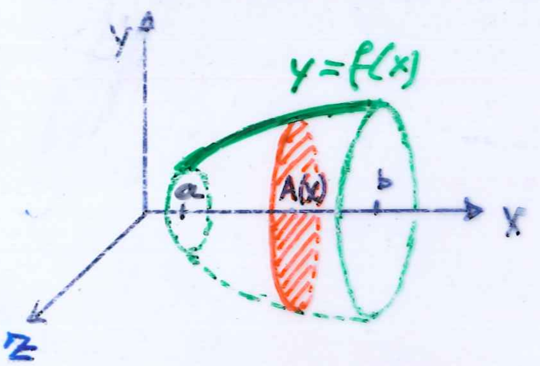
Qualche applicazione degli integrali definiti

$\boxed{1.}$ Calcolo di aree (VEDI)

$\boxed{2.}$ Calcolo del volume di un solido.

Se possibile conoscere il valore dell'area di tutte le sezioni del solido con piani ortogonali a una direzione fissata



il volume è ....

$$\int_a^b A(x)\,dx$$

In particolare se il solido si ottiene per rotazione attorno all'asse x di $y=f(x)$ risulta

$$A(x)=\pi(f(x))^2$$

... il volume di ogni cilindretto : $dV=\pi\,(f(x))^2\,dx$

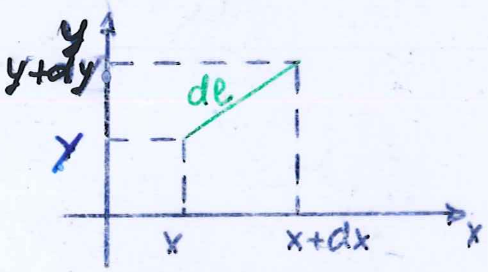
e quindi il volume totale : $V=\int_a^b \pi\,(f(x))^2\,dx$

ES 1. $f(x)=\cos x\,,\ a=0\,,\ b=\frac{\pi}{2} \Rightarrow V=\int_0^{\pi/2}\pi(\cos x)^2dx= \ldots$

Es. 2. $f(x)=\sqrt{1-x^2}\,,\ a=0\,,\ b=1 \Rightarrow V=\int_0^1\pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2dx=$
(SEMISFERA)
$=\pi\int_0^1(1-x^2)\,dx=\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$\boxed{3.}$ Calcolo della lunghezza di un arco di grafico

Ipotesi: $f(x)$ e $f'(x)$ continue in $[a,b]$. Posto $y=f(x)$



$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(dx)^2\cdot\left(1+(f'(x))^2\right)}=$$
$$=\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$\Rightarrow$ lunghezza dell'arco tra $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$

$$\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

ES.3 $f(x)=\mathrm{Ch}\,x$ con $a=0$, $b=h>0$.

1. $f(x) = \cos x \quad a = 0, \; b = \frac{\pi}{2}$

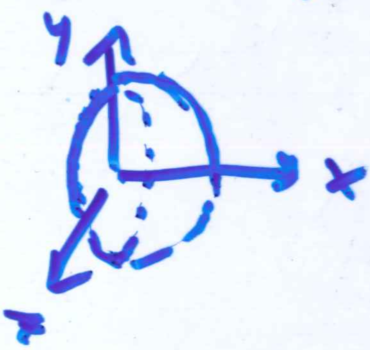
Volume solido di rotazione

$$\int_0^{\pi/2} \pi (\cos x)^2 dx =$$

$$= \pi \left[\frac{\operatorname{sen} x \cos x + x}{2} \right]_0^{\pi/2} = \dots$$

$$= \pi \left(\frac{\pi/2}{2} - \frac{0}{2} \right) = \frac{\pi^2}{4}$$

2. Volume della semisfera di raggio R centrata in (0,0) : $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ con $x \geq 0$.



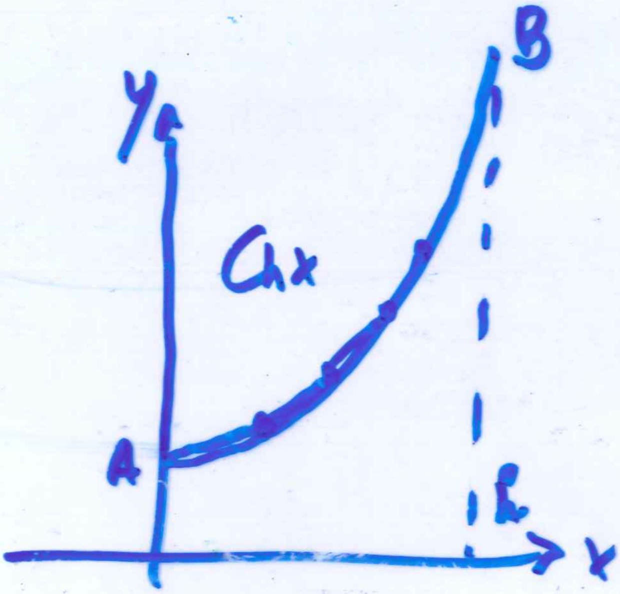
$$\int_0^R \pi (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx =$$

$$= \int_0^R \pi (R^2 - x^2) \, dx =$$

$$= \left[\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^R =$$

$$= \frac{2\pi}{3} R^3$$

ES.3



Lunghezza dell'arco del grafico di $\mathrm{Ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ relativam. a $A=(0,1)$ e $B=(h, \mathrm{Ch}\,h)$.

$$\int_0^h \sqrt{1+(\mathrm{Sh}\,x)^2}\,dx = \frac{e^h - e^{-h}}{2} - 0$$

PRIMITIVE:

$$\int \sqrt{1+\frac{e^{2x} - 2\cdot e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}}\,dx =$$

$$= \int \sqrt{(\mathrm{Ch}\,x)^2}\,dx = \int \mathrm{Ch}\,x\,dx =$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$$

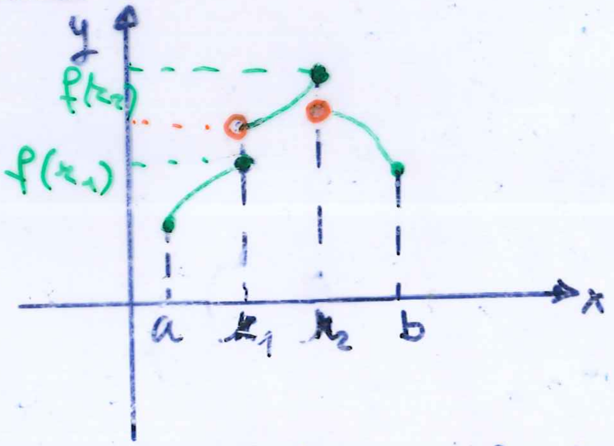
INTEGRALI GENERALIZZATI

1. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ non è continua su tutto $[a,b]$ ma presenta solo un numero finito $k-1$ di discontinuità A SALTO (*) definisco:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \qquad \text{ove}$$

$x_0 = a$, $x_k = b$, $x_1, \dots, x_{k-1}$ sono i punti di discontinuità.

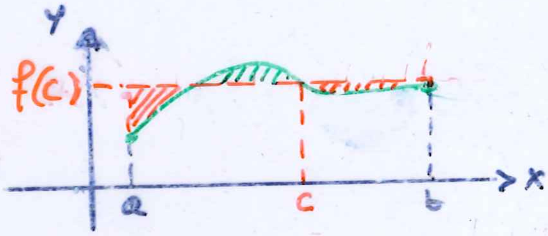
(*) oppure eliminabili



Il calcolo può essere fatto sfruttando - su ogni intervallo in cui è continua - i metodi visti precedentemente.

ATTENZIONE. Ci sono due teoremi teoricamente fondamentali che valgono SOLO per funzioni continue:

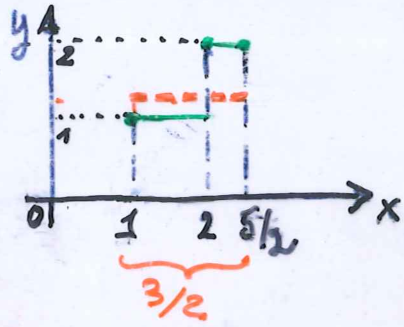
TEOR. DEL VALOR MEDIO: se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ esiste $c \in (a,b)$ tale che $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(c)$



TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO. se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, $F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$ è derivabile in (a,b) e $F'(z) = f(z)$.

Ad es. se $f(x) = \lfloor x \rfloor$ e $[a,b] = [1, 5/2]$, posso calcolare

$$\int_1^{5/2} \lfloor x \rfloor \, dx = \int_1^2 1 \cdot dx + \int_2^{5/2} 2 \, dx = 1 + 1 = 2,$$



ma non esiste $c \in [1, 5/2]$ tale che

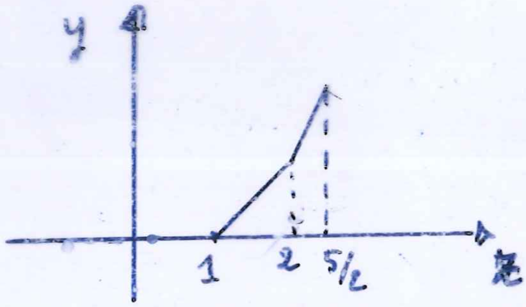
$$\int_1^{5/2} \lfloor x \rfloor \, dx = \left(\frac{5}{2} - 1\right) \lfloor c \rfloor$$

poiché vorrebbe dire: $\lfloor c \rfloor = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$!

Ancora: esiste la funzione $F(z) = \int_1^z f(x)\,dx = \begin{cases} z-1 & \text{se } z \in [1,2) \\ 2z-3 & \text{se } z \in [2, 5/2] \end{cases}$

$$\int_1^2 dx + \int_2^z 2\,dx = 1 + 2z - 4$$

ma in $x = 2$ non è derivabile



2. $f(x)$ definita e continua in $[a,b)$ ma NON LIMITATA in $[a,b]$ $\left(\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty\right)$

Definisco l'<u>integrale</u> <u>generalizzato</u> (INT. IMPROPRIO DI II SPECIE)

$$\int_a^{b^-} f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{z \to b^-} \int_a^z f(x)\,dx$$

Se il limite esiste finito (o infinito) dico che l'integrale generalizzato (IMPROPRIO di II specie) è CONVERGENTE (o DIVERGENTE) (ecc.: terminologia dei limiti) VEDI ES. p. I13.1

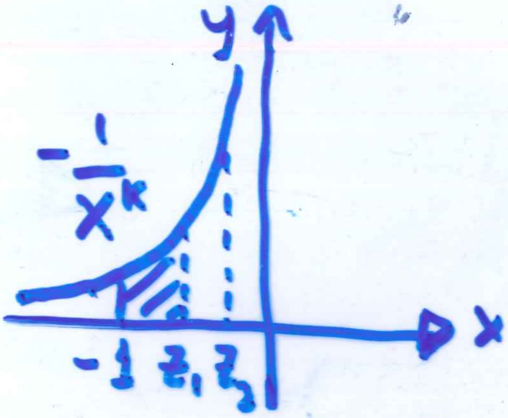
Esempio cruciale: $\int_{0^+}^b \frac{1}{x^k} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^b \frac{1}{x^k}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{cases} \ln|b| - \ln|\varepsilon| \\ \dfrac{b^{1-k} - \varepsilon^{1-k}}{1-k} \end{cases} =$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{INTEGR. DIVERG.} \\ \text{se } k > 1 & +\infty \\ \text{se } k < 1 & \dfrac{b^{1-k}}{1-k} \end{cases}$$

Ripreso in I13.2

In realtà qui $f(x)$ è def. e continua in $(0,b]$ ...

I13.1



Sia $k>0$ INTERO

$f(x) = -\frac{1}{x^k}$ è cont. in $[-1,0)$

ma $\lim\limits_{x \to 0^-} -\frac{1}{x^k} = +\infty$

$$\lim_{z \to 0^-} \int_{-1}^{z} -\frac{1}{x^k}\,dx \quad ?$$

Primitive?

$$\int \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} k=+1 & \ln|x| + c \\ k>1 & \dfrac{x^{1-k}}{1-k} + c \end{cases}$$

$k \neq 1$
$$\lim_{z \to 0^-} \left[-\frac{x^{1-k}}{1-k} \right]_{-1}^{z} = \lim_{z \to 0^-} \frac{1 - z^{1-k}}{1-k} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

$k=1$
$$\lim_{z \to 0^-} \left[-\ln|x| \right]_{-1}^{z} = \lim_{z \to 0^-} 0 - \ln(-z) = +\infty$$

in entrambi i casi il limite è $+\infty$ $\Rightarrow$ dirò che l'integrale improprio di II specie è divergente

Sia k reale. $\boxed{I\,13.2}$

$f(x) = \frac{1}{x^k}$ è continua in $(0, b]$, illim.

$$\int_{0^+}^{b} \frac{1}{x^k}\,dx = \lim_{z \to 0^+} \int_z^b \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} k=1 \\ k>1 \\ 0<k<1 \end{cases} ?$$

PRIMITIVE

$k=1 \qquad \ln|x|$

$k \neq 1 \qquad \dfrac{x^{1-k}}{1-k}$

$$k=1 \quad \lim_{z \to 0^+} \left[\ln x\right]_z^b = \lim_{z \to 0^+} \ln b - \ln z = +\infty$$

$$k>1 \quad \lim_{z \to 0^+} \frac{b^{1-k} - z^{1-k}}{1-k} = +\infty \qquad \boxed{1-k<0}$$

$$0<k<1 \quad \lim_{z \to 0^+} \frac{b^{1-k} - z^{1-k}}{1-k} = \frac{b^{1-k}}{1-k} \qquad \boxed{1-k>0}$$

l'int. imp. converge a $\dfrac{b^{1-k}}{1-k}$

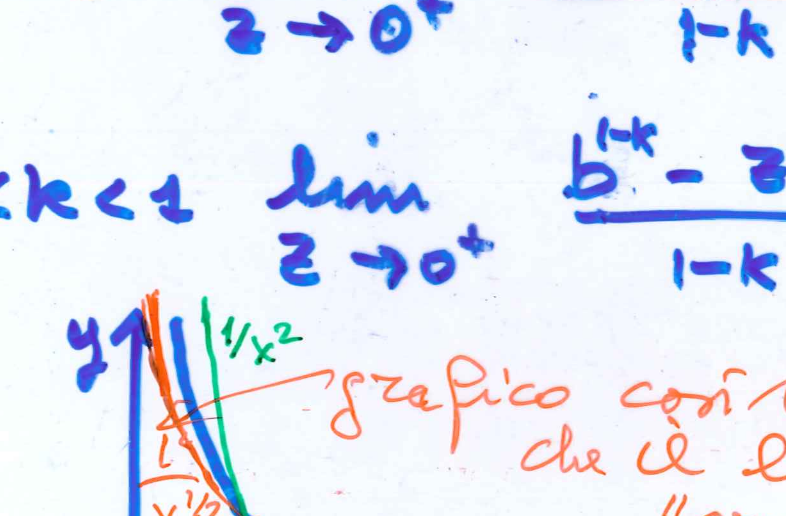


grafico così vicino a y che il limite delle "aree" è finito.