$f: [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

continua in $[a, b)$, ma illimitata

considero

$$F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$$

$$\lim_{z \to b^-} F(z) := \int_a^{b^-} f(x)\,dx$$ è detto

integr. improprio II specie ...

sempre che il limite esista

Se F è monotona questo limite esiste (finito o infinito)

Quando F è monotona su $[a, b)$? Quando la sua derivata ha segno costante su $[a, b)$. Per il T. fond. del calcolo

$$F'(x) = f(x)$$

$\Rightarrow$ sono certo che l'integr. impr.

$\int_a^b f(x)\,dx$ esiste se $f(x)$ è una funz positiva (oppure negativa) su $[a, b)$.

$f: (a,b] \to \mathbb{R}$

continua in $(a,b]$ ma illimitata

Considero

$$G(z) = \int_z^b f(x)\,dx = -\int_b^z f(x)\,dx$$

$$\lim_{z\to a^+} G(z) := \int_{a^+}^b f(x)\,dx$$

chiamo anche questo integr. impr. di II specie (sempre che il limite esista)

Per T.F. del Calcolo $\quad G'(z) = -f(z)$

e quindi $G(z)$ sarà monotona se la $f(x)$ ha segno costante

Sia ora invece $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua sull'interv. illimitato $[a,+\infty)$.

Esiste $\quad F(z) = \int_a^z f(x)\,dx \quad \forall z \in [a,+\infty)$

Chiamo $\quad \lim_{z\to+\infty} F(z) := \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

integrale improprio di I specie (sempre che il limite esista)

$f : (-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
illimitato
continua su $(-\infty, b]$
esiste
$$G(z) = \int_z^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{z \to -\infty} G(z) := \int_{-\infty}^b f(x)\,dx$$: chiamo anche questo

integr. improprio di I specie
(sempre che il limite esista)

ESEMPIO CHIAVE ($a>0$, $k>0$ reali)

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^k}\,dx = \lim_{z\to+\infty} \int_a^z \frac{1}{x^k}\,dx =$$

$= \boxed{k=1}$ $\lim_{z\to+\infty} [\ln|x|]_a^z = \lim_{z\to+\infty} \ln z - \ln a = +\infty$

$\boxed{k\neq 1}$ $\lim_{z\to+\infty} \left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\right]_a^z = \lim_{z\to+\infty} \frac{z^{1-k} - a^{1-k}}{1-k} =$

$\boxed{k\neq 1} =$

$k<1$: $+\infty$ poiché $z^{1-k} \to +\infty$ e $1-k>0$

$k>1$: $\lim_{z\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{z^{k-1}} - \frac{1}{a^{k-1}}}{1-k} = \dfrac{\frac{1}{a^{k-1}}}{k-1} > 0$

$$= \frac{1}{(k-1)(a^{k-1})}$$

Ancora $\int_0^{2^-} \frac{1}{(2-x)^k}\,dx =$

3. $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad$ f continua in ogni sottointervallo chiuso e limitato.

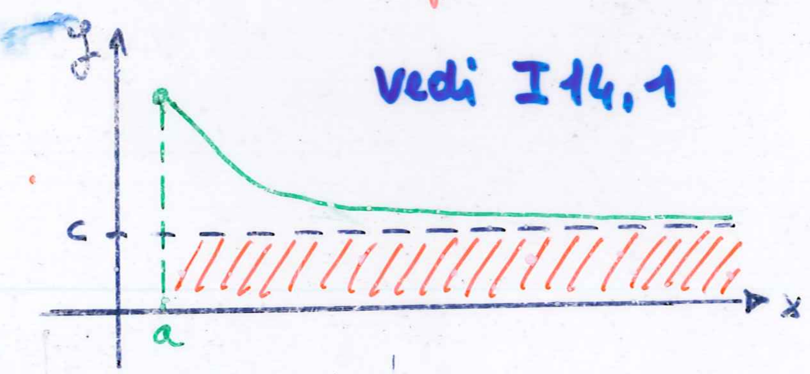
Definisco l'integrale generalizzato (INT. IMPROPRIO DI I SPECIE)

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{\omega\to+\infty} \int_a^{\omega} f(x)\,dx$$

Esempio cruciale:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} k=1: \lim\limits_{\omega\to+\infty} \ln|\omega| - \ln|a| = +\infty \\ k<1: \lim\limits_{\omega\to+\infty} \dfrac{\omega^{1-k} - a^{1-k}}{1-k} = +\infty \\ k>1: \lim\limits_{\omega\to+\infty} \dfrac{1/\omega^{k-1} - a^{1-k}}{1-k} = \dfrac{a^{1-k}}{k-1} \end{cases}$$

NOTA BENE: perché questo integrale converga (cioè perché converga $\lim\limits_{\omega\to+\infty} \int_a^{\omega} f(x)\,dx$) bisogna ALMENO che $f(x) \to 0$ allorché $x \to +\infty$



vedi I 14,1

$$\int_a^{z} f(x)\,dx \geq \int_a^{z} c\,dx = c(z-a)$$

$$\lim_{z\to+\infty} F(z) \geq \lim_{z\to+\infty} c(z-a) = +\infty$$

Es. 1) Si trovi il valore del seguente integrale generalizzato

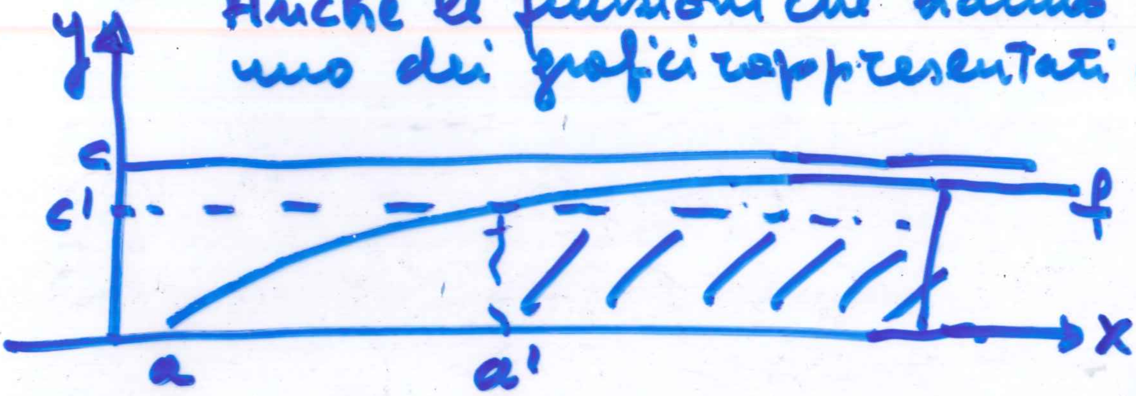
$$\int_{16}^{+\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx$$

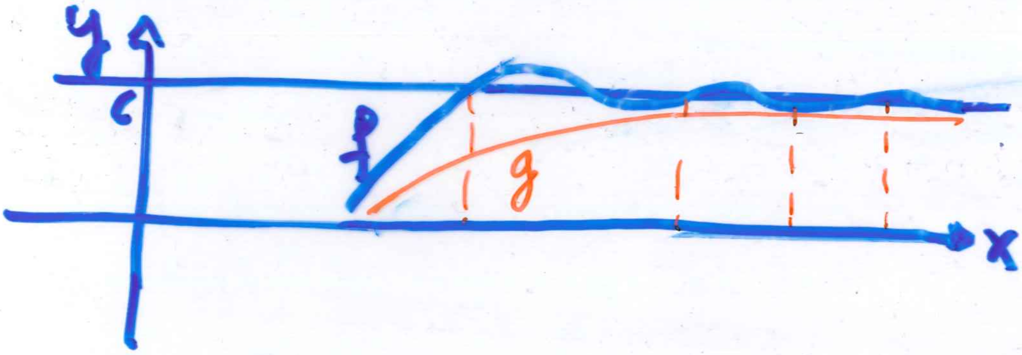
vedi I 14.2

Es. 2) Calcolare $\int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-\sqrt{x}}\,dx$

vedi I 14.3

Anche le funzioni che hanno uno dei grafici rappresentati qui sotto





hanno $\lim_{x \to +\infty} f = c$ con $c \neq 0$

Si illustrano le considerazioni che permettono di dire che $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

Cioè: l'integ. improprio di una funzione $f(x)$ definitivamente di segno costante non converge se il suo limite non è zero

Ma questo non significa che se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

allora $\int_a^{+\infty} f(x)$ converge,

come dimostra $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$

$\boxed{I\ 14.2}$

$$\int_{16}^{+\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \int_{16}^{z} \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx = +\infty$$

perché $f(x) = \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$ per $x \to +\infty$

tende a $1/2 \neq 0$, $f(x)>0 \Rightarrow F(z)$

è crescente, illimitata $\Rightarrow$ tende a $+\infty$.

Con i conti: Calcolo una primitiva

$$\int \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx \underset{\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2t\,dt\end{array}}}{=} \int \frac{2+t}{2t+1}\cdot 2t\,dt =$$

$$= \int \frac{2t^2+4t}{2t+1}\,dt = \text{RAZ FRATTA}$$

$$\begin{array}{r|l} 2t^2+4t & 2t+1 \\ \hline -2t^2-t & t+3/2 \\ \hline 3t & \\ -3t-3/2 & \end{array}$$

$$= \int \left(t+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1}\right)dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}\ln|2t+1|+c = \frac{x}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{3}{4}\ln(2\sqrt{x}+1)+c$$

Quindi

$$\int_{16}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{z\to+\infty} \frac{z+3\sqrt{z}}{2}-\frac{3}{4}\ln(2\sqrt{z}+1)-8-6+\frac{3}{4}\ln 3 = +\infty$$

per confronto di ordini di infinito

$$\int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-\sqrt{x}}\, dx$$: osservo che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ vale la pena di fare il conto.

$$= \lim_{z\to+\infty} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\, dx =$$

osservo che $\left(e^{-\sqrt{x}}\right)' = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\sqrt{x}}$

$$= \lim_{z\to+\infty} \int_0^z -2 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\, dx =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} -2\left[e^{-\sqrt{x}}\right]_0^z =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} -2\left(e^{-\sqrt{z}} - e^0\right) = 2$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\, dx = \lim_{z\to+\infty} \int_2^z \frac{dx}{x\ln x} =$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + c.}$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \ln|\ln z| - \ln|\ln 2| = +\infty$$

Es 3) Calcolare $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \operatorname{sen} e^{-x} \, dx$

Es 4) Quale delle seguenti uguaglianze è falsa?

(a) $\int_1^e x^{-2} dx = 1 - e^{-1}$

(b) $\int_{0+}^1 x^{-1/2} dx = 2$

(c) $\int_{-1}^e x^{-2} dx = -(1 + e^{-1})$

(d) $\int_{1/2}^{+\infty} x^{-2} dx = 2$

(f) $\int_{-1}^1 |x|^{-1/2} dx = 4$

ES.5) Calcolare $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} \, dx$

VEDI I 14.3

Es.6) Calcolare $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^k} \, dx \quad (k \neq 1)$

VEDI I 15.1

E $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} \, dx$ che cosa fa? Converge o diverge?

Non è facile calcolare una primitiva e quindi la funzione integrale e il suo limite per $z \to +\infty$.

L'idea è di procedere per CONFRONTO.

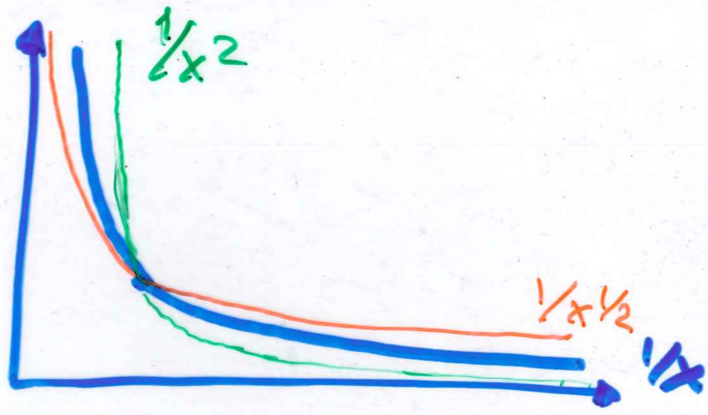
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k}\,dx = \qquad k \neq 1$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \int_2^{z} \frac{1}{x(\ln x)^k}\,dx = \qquad \boxed{\int \frac{f'}{f^k}\,dx}$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \left[\frac{(\ln x)^{1-k}}{1-k}\right]_2^{z} =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \frac{(\ln z)^{1-k} - (\ln 2)^{1-k}}{1-k} =$$

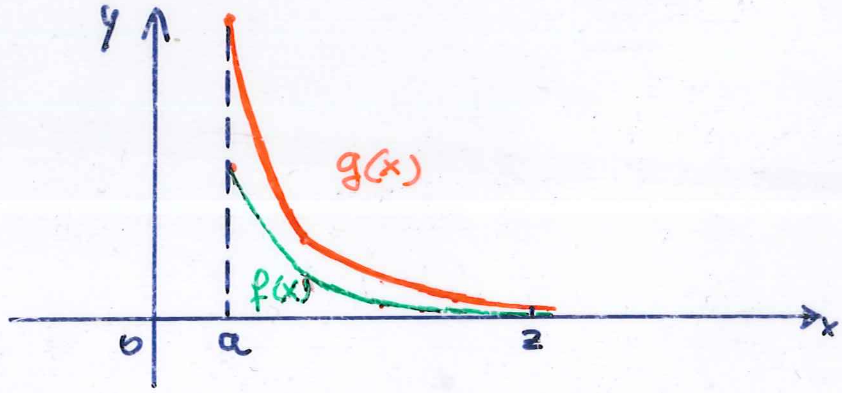
$$= \begin{cases} \boxed{0<k<1} : +\infty \\ \boxed{k>1} : \dfrac{(\ln 2)^{1-k}}{k-1} \end{cases}$$



Ho una funzione $f(x) \geq 0 \Rightarrow F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$ è CRESCENTE

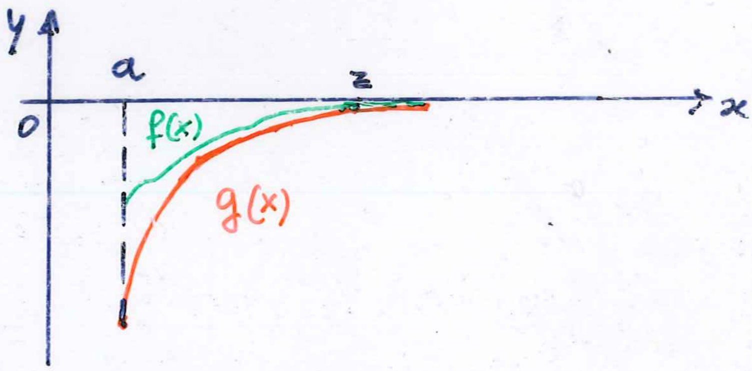
$\Rightarrow \lim_{z \to +\infty} F(z)$ esiste (finito o no)

Se esiste una funzione $g(x) \geq f(x)$ su tutto $(a, +\infty)$ e tale che $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx$ è finito, allora (TEOR. del confronto) anche $\lim_{z \to +\infty} F(z)$ è finito.



NOTA: l'area del TRAPEZOIDE di $g(x)$ è maggiore dell'area del TRAPEZOIDE DI $f(x)$

Similmente se $f(x) \leq 0$ in $(a, +\infty)$ e $g(x) \leq f(x)$ su $(a, +\infty)$ con $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx$ finito, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge:



A rovescio: se $f(x) \geq 0$ e c'è una funzione $g(x)$ tale che $f(x) \geq g(x) \geq 0$ e $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx = +\infty$ allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$$

(Tradurre nel caso negativo)

I 16.1

Voglio dimostrare che

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x} \quad \text{è convergente.}$$

In $[2,+\infty)$ si ha:

$$0 < \frac{1}{x^2 \ln x} < \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{} \ ?$$

Non in tutto l'intervallo, poiché

$$f(x) = \frac{1}{x^2 \ln x} < \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{\ln x} > 0$$

$N>0 \quad x>e$

$D>0 \quad x>1$ certo in $[2,+\infty)$!

$[e,+\infty) \subset [2,+\infty)$. Allora spezzo la funzione integrale (additività interv. integr.):

$$\int_2^z f(x)\,dx = \underbrace{\int_2^e f(x)\,dx}_{\text{numero}} + \int_e^z f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to+\infty} \int_2^z f(x)\,dx = \int_2^e f(x)\,dx + \underbrace{\lim_{z\to+\infty} \int_e^z f(x)\,dx}_{\text{int. imp.}}$$

poiché in $[e,+\infty)$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{converge}$$

anche $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$ converge

in quanto in $[e,+\infty)$

$$0 < \frac{1}{x^2 \ln x} < \frac{1}{x^2}$$

e sommando $\displaystyle\int_2^e f(x)\,dx$ ho ancora

un numero finito $\Rightarrow \displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$

è convergente.

È complicato. Se possibile

sostituisco al criterio del

confronto con disuguaglianze

il criterio di confronto con

limiti (event. confronto asintotico)

continue ... continue

Se $f(x) \geq 0$ in $[a,+\infty)$ e $g(x)>0$ in $[a,+\infty)$ e se

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ finito
- $\lim\limits_{z\to+\infty} \displaystyle\int_a^z g(x)\,dx$ è finito

allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è finito

INVECE se

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
- $\lim\limits_{z\to+\infty} \displaystyle\int_a^z g(x)\,dx = +\infty$

allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

ADDIRITTURA se $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ posso dire

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se e solo se converge $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

~~AD~~ ES. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge poiché

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{z\to+\infty} \int_0^z e^{-x}\,dx = \lim_{z\to+\infty} 1-e^{-z} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x(1-x)} = 0.$$

ES.7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^s e^{-x}\,dx$ $\overset{s\in\mathbb{R}}{\text{converge}}$. Infatti:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^s e^{-x}}{x^{-k}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{s+k}}{e^x} = 0$ $\forall k$ e in particolare per $k=2$. Poiché $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ converge, anche l'integrale assegnato converge

I18.1

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,dx$$

per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{|x|} \overset{\boxed{x>0}}{=} \frac{1}{x}$$

cioè $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = 1$

Per il criterio del confronto asintotico

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge perché

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

per $x \to +\infty$ $\displaystyle\frac{1}{x\sqrt{2x+1}} \sim \frac{1}{x\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot x^{3/2}}$

poiché $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge, per il criterio del confronto asint., anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

In maniera simile ci si comporta con gli integrali impropri di II specie:

ES. $\int_{0^+}^{1} e^{-x} x^s dx$ è un integrale improprio solo se $s<0$

Ora $e^{-x}x^s > 0$; $e^{-x} \to 1$ per $x \to 0$ e quindi

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-x}x^s}{x^s} = 1$$

Allora, visto che $\int_{0^+}^{1} x^s dx$ converge $\Leftrightarrow -1<s<0$,

anche $\int_{0^+}^{1} e^{-x}x^s dx$ converge $\Leftrightarrow -1<s<0$.

Dunque resta definita una funzione:

$$\Gamma(s) = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-x}x^s dx \qquad \forall s > -1$$

detta funzione di Eulero che è tale che

$$\Gamma(n) = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-x}x^n dx = n!$$

$$\int_{0^+}^{1} e^{-x}x^s dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x}x^s dx$$