Funzioni di PIÙ VARIABILI

Si hanno ogni volta che l'ESITO (dato in uscita) dipende non da 1 solo ma da 2 o PIÙ DATI DI INGRESSO

Es. 1 $\quad V = k \dfrac{T}{P}$ $\quad$ (k costante >0) : il volume di un gas perfetto dipende da temperatura e pressione

Es. 2 $\quad a = b \cdot h$ $\quad$: l'area di un rettangolo dipende dalla sua base e dalla sua altezza.

PER ORA CONSIDERIAMO SOLO FUNZIONI DI DUE VARIABILI.

È essenziale, per sviluppare successivamente la teoria, ORDINARE IN MODO UNIVOCO I DATI IN INGRESSO, cioè decidere che una certa variabile è da considerare come la PRIMA, un'altra come SECONDA ecc. Ciò non comporta un giudizio di importanza!

Ad es. nel caso del gas perfetto posso pensare T come 1^a variabile e P come 2^a e allora scriverò

$$V = V(T, P)$$

o viceversa e allora scriverò $\quad V = V(P, T)$. L'importante è che si resti fedeli alla scelta fatta.

Questa osservazione mette in luce che

l'insieme di definizione di una funzione di 2 variabili è un insieme di coppie ordinate di numeri reali, cioè un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$.

(similmente se le variabili sono $n(\geq 2)$, l'insieme di definizione della funzione è un s.i. E di $\mathbb{R}^n$)

Invece l'IMMAGINE di queste funzioni sarà ancora $\subseteq \mathbb{R}$.

FORMALMENTE:

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Una funzione reale di due variabili reali con insieme di definizione E

$$f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

è una corrispondenza che a OGNI $(x,y) \in E$ associa UNO E UN SOL NUMERO REALE $z = f(x,y)$

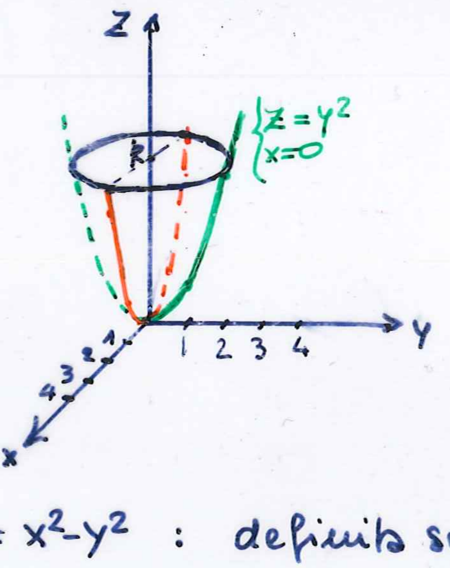
GRAFICO: in $Oxyz$ si considera $\{(x,y,f(x,y)),\ (x,y) \in E\}$
Nei casi più comuni è una superficie che rappresenteremo più semplicemente scrivendo: $z = f(x,y)$.

Es 1 $z = x^2+y^2$: definita su tutto $\mathbb{R}^2$, a valori in $[0,+\infty)$
Per "vedere" il grafico osservo che

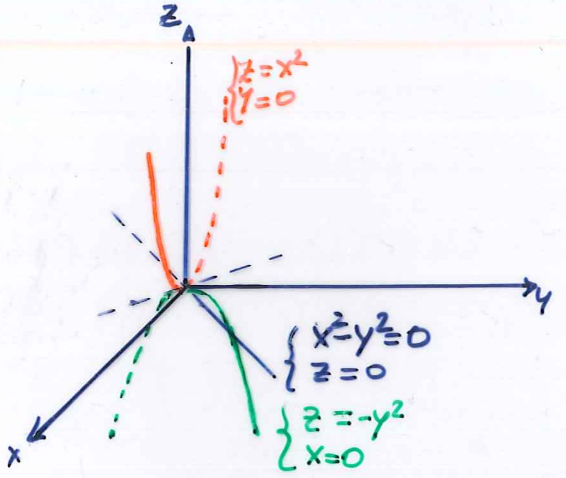
1) sezioni con piani $z = k$ $(k \geq 0)$ danno luogo alle circonferenze $\begin{cases} x^2+y^2=k \\ z = k \end{cases}$

2) sezioni con i due piani coordinati $x=0$ e $y=0$ danno luogo rispettivamente alle parabole
$\begin{cases} z=y^2 \\ x=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} z=x^2 \\ y=0 \end{cases}$

... PARABOLOIDE DI ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE z.

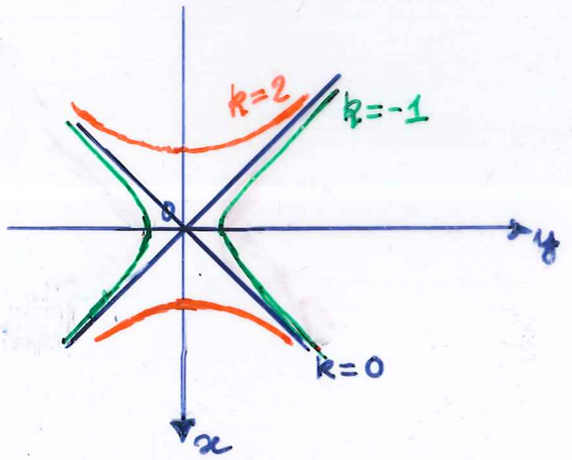


Es. 2 $z = x^2-y^2$: definita su $\mathbb{R}^2$, a valori in $\mathbb{R}$.
Operando come sopra: PARABOLOIDE A SELLA



Non è facile leggere il grafico: conviene ad es. rappresentare la proiezione sul piano xOy delle curve che si ottengono per sezione con piani ⊥ asse z, della forma $z = k$

Si vede che per $k > 0$ le curve sono tutte disposte come l'iperbole rossa mentre per $k < 0$ sono disposte come l'iperbole verde e quindi in $(0,0)$ si viene a creare un'insellatura (... dov'è l'arcione ? ... e le staffe ?)



ES.3 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$: definita purché $1 - x^2 - y^2 \geq 0$.

Quindi $E = \{ (x,y) : x^2 + y^2 \leq 1 \}$: cerchio di raggio 1

i valori assunti sono contenuti in $[0,1]$

Si ha $f(x,y) = 0$ sul bordo (= circonferenza) di E

$f(x,y) = 1$ in $(0,0) \Rightarrow$

$(0,0)$: punto di massimo per la funzione

punti della circonferenza invece sono punti di minimo

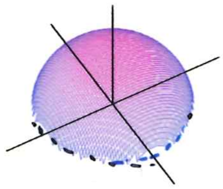
Il GRAFICO è una SEMISFERA.

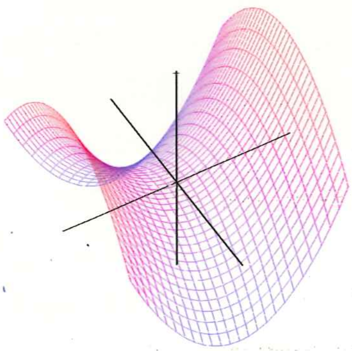
ES. 4 $z = \sqrt{(x^2+y^2-2x)(4x-x^2-y^2)}$: definita purché $(x^2+y^2-2x)(4x-x^2-y^2) \geq 0$ cioè nei punti compresi tra le 2 circonferenze $(x-1)^2+y^2=1$ e $(x-2)^2+y^2=4$

Sulle 2 circonferenze vale 0. Altrove >0. Ha un MAX.?

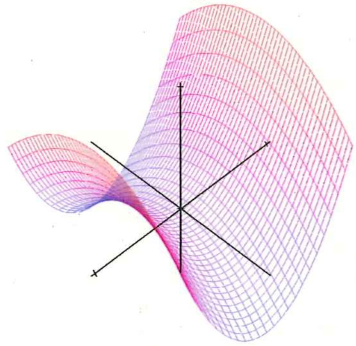
Funzioni di due variabili

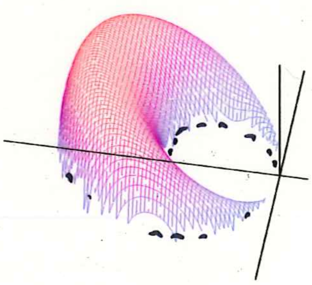
$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

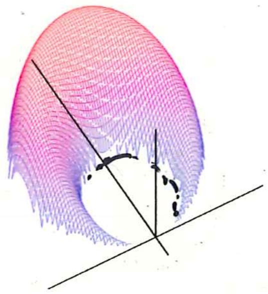




$$f(x, y) = x^2 - y^2$$







$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 2x)(4x - x^2 - y^2)}$$