# Criteri di convergenza/diverg. per integrali impropri di II specie.

Sia

- $f: (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, cont. in $(a, b]$ e illimitata.
- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ (oppure $\leq 0$ ...)

Allora $\int_{a+}^{b} f(x)\,dx$ esiste finito o infinito

perché

$$\int_{a+}^{b} f(x)\,dx = \lim_{z \to a+} \underbrace{\int_{z}^{b} f(x)\,dx}_{\text{essendo monotona}} \quad : \text{esiste}$$

1° Criterio del <u>confronto</u> per stabilire se l'integrale impr. di II specie converge/div. <u>basato sulla disuguaglianza.</u>

(A) Se $f(x) \geq 0$ e $\exists\, g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in (a, b]$ tale che $\int_{a+}^{b} g(x)\,dx$ converge allora

$\int_{a+}^{b} f(x)\,dx$ converge.

Invece,

(B) Se $f(x) \geq 0$ ed esiste $g(x) \geq 0$ t.c. $g(x) \leq f(x)$ e

$$\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx = +\infty$$

allora $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ diverge

2° criterio (basato sui limiti)

(A) Se $f(x) \geq 0$ in $(a,b]$ ed esiste una $g(x) > 0$ in $(a,b]$ tale che

1) esista $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e sia finito: e

2) $\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx$ è convergente.

allora $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ è converg.

(B) Se $f(x) \geq 0$ in $(a,b]$ e esiste $g(x) > 0$ in $(a,b]$ t.c.

1) esista $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \underset{(-)}{+}\infty$

2) $\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx$ divergente

allora anche $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ è divergente.

3° criterio (confronto asintotico)

Se $f(x) \geq 0$ in $(a, b]$ ed esiste $g(x) > 0$ in $(a, b]$ tale che

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0 \quad (\ell \in \mathbb{R})$$

allora

$\int_{a+}^{b} f(x)\,dx$ converge se e solo se converge $\int_{a+}^{b} g(x)\,dx$

---

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}\,dx \quad ??$$

Osservo che $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}} = +\infty$

Quindi la funz integranda è illimitata. Inoltre anche l'interv. di integr. è illimitato.

Che cosa rappresenta l'integrale?

4)

$$\int_t^z \frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}\,dx =$$ prendo $a \in (0,+\infty)$ indifferente quale

$$\int_t^a \frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}\,dx + \int_a^z \frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}\,dx$$

Visto che posso scegliere $a$ come voglio purché in $(0,+\infty)$, prendo $a=1$

Definisco

$$\int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}\,dx = \underbrace{\int_{0^+}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}}_{\text{II specie}} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}}_{\text{I specie}}$$

Vale l'aritmetica dei limiti

Allora questo integrale converge o no?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$$ in $(0,+\infty)$ è $>0$ definita continua

Valgono le condizioni per applicare i criteri di confronto.

Dobbiamo trovare 2 diverse funzioni di confronto, una per $x \to 0+$ e una per $x \to +\infty$.

Per $x \to 0+$

$$\frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x(0+1)(0+2)}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} = g_0(x)$$

$$\left[\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{g_0(x)} = 1\right]$$

Per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x \cdot x \cdot x}} = \frac{1}{x^{3/2}} = g_\infty(x)$$

$$\left[\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g_\infty(x)} = 1\right]$$

Applico il criterio del confronto asint.:

$$\int_{0+}^{1} \frac{1}{\sqrt{2x}}\, dx = \lim_{z \to 0+} \int_z^1 \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \lim_{z \to 0+} \left[\sqrt{2}\sqrt{x}\right]_z^1$$

$$= \lim_{z \to 0+} \sqrt{2}\left(1 - \sqrt{z}\right) = \sqrt{2} \text{ finito.}$$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{1} f(x)\,dx \text{ converge.}$$

Passiamo all'altro integrale

$$g_\infty(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = \lim_{z\to+\infty} \int_1^z \frac{dx}{x^{3/2}} = \lim_{z\to+\infty} \left[\frac{-2}{x^{1/2}}\right]_1^z =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \left(\frac{-2}{z^{1/2}} + \frac{+2}{1}\right) = 2 \text{ finito}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge.}$$

Mettendo insieme i 2 risultati

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{0^+}^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx}_{= \int_{0^+}^{+\infty} f(x)\,dx} \text{ converge}$$

---

$$\int_{1+}^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\, dx$$

I.D. funz. integranda.

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases} \qquad (0,1) \cup (1,+\infty)$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{1}{x^2 \ln x} = +\infty \Rightarrow \text{funz. illimitata in } (1,+\infty)$$

è continua in $(1,+\infty)$

$\Rightarrow$ abbiamo un integrale somma di un integrale impr. di II specie e di uno di I specie.

$$\int_{1+}^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\, dx = \int_{1+}^{e} \frac{1}{x^2 \ln x}\, dx + \int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\, dx$$

Applico il criterio del confronto asintotico sull'integ. di II specie

per $x \to 1+$

$$\frac{1}{x^2 \ln x} \overset{\boxed{x=(1+x-1) \text{ e } x-1 \to 0}}{=} \frac{1}{x^2 \ln(1+(x-1))} \sim$$

$$\sim \frac{1}{1^2 \cdot (x-1)} = \frac{1}{x-1}$$

e inoltre

$$\int_{1^+}^{e} \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{z\to 1^+} \int_z^e \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= \lim_{z\to 1^+} \left[\ln|x-1|\right]_z^e =$$

$$= \lim_{z\to 1^+} \left(\underbrace{\ln(e-1)}_{\text{numero}} - \ln(z-1)\right) = +\infty$$

Allora $\displaystyle\int_{1^+}^{e} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$ diverge.

Invece:

$\displaystyle\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$ converge (lo abbiamo già visto ma lo ripetiamo usando il criterio 2)

Qui non saprei individuare una funzione asintotica a $f(x)$ più semplice di $f(x)$.

Cerco una funzione di confronto che abbia int. impr. di I specie conv. e che abbia verosimilmente limite del rapporto finito, ad es.

$g(x) = \frac{1}{x^k} \qquad k > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2 \ln x}}{\frac{1}{x^k}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{k-2}}{\ln x} = \text{finito} \iff k-2 \geq 0$$

Scelgo $k=2$ ; ho che

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ finito e dato che

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{z \to +\infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_e^z = \frac{1}{e} \text{ finito}$$

anche $\int_e^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Allora

$$\int_{1^+}^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\, dx = \underbrace{\int_{1^+}^{e} \frac{dx}{x^2 \ln x}}_{\text{divergente}} + \underbrace{\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x}}_{\text{convergente}}$$

è divergente.