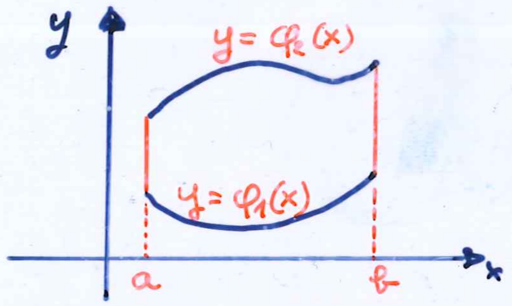
Cerchiamo di generalizzare la teoria vista in 1 variabile.

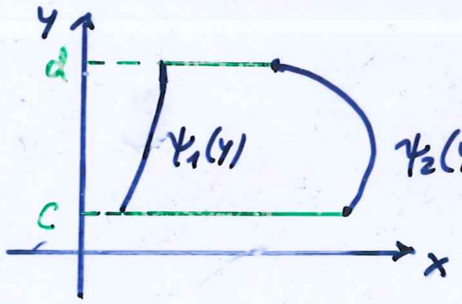
Anzitutto: come con funzioni di 1 variabile abbiamo ristretto l'attenzione a funzioni definite su intervalli (o loro unioni) qui la restringiamo a funzioni definite su "domini semplici" (o loro unioni finite) intendendo per dominio semplice un s.i. E di $\mathbb{R}^2$ del tipo

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a < x < b \;\text{ e }\; \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x) \text{ con } \varphi_1, \varphi_2 \text{ continue in } (a,b) \right\}$$

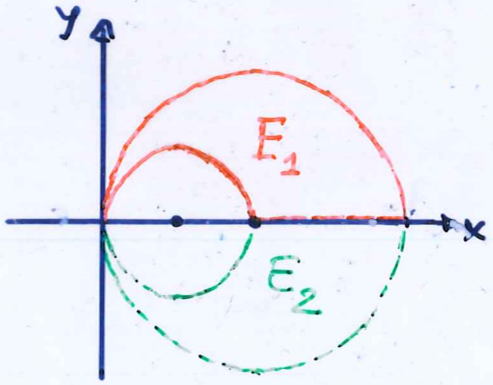
oppure

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; c < y < d \;\text{ e }\; \psi_1(y) < x < \psi_2(y) \text{ con } \psi_1, \psi_2 \text{ continue in } (c,d) \right\}$$





Nel caso dell'ultimo esempio.



l'insieme di definiz. è unione di due domini semplici E_1 ed E_2 del 1° tipo

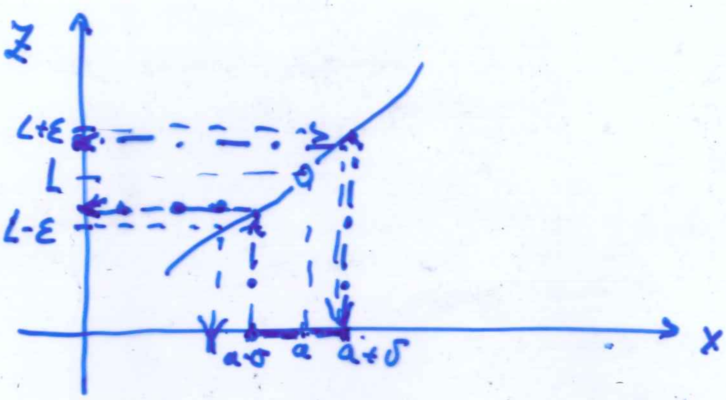
Si dice che $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ se e solo se

PER OGNI $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$ $(\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0)$ tale che

se $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ allora $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

Il concetto di limite è indipendente dal modo con cui il punto (x,y) si avvicina ad (a,b). In particolare il limite se esiste è unico.

Per 1 variabile:



$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$

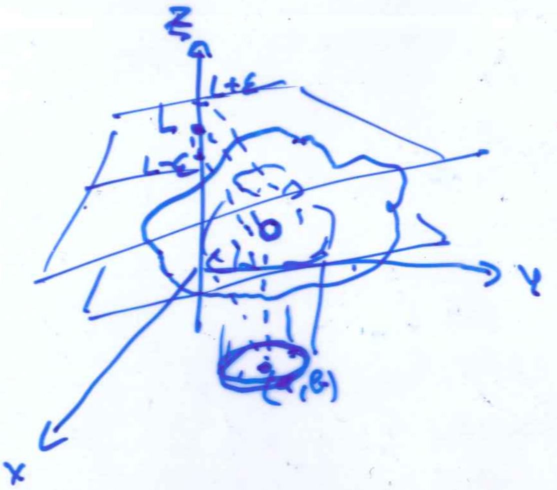
$\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ t.c.

$\forall\, x \in (a-\delta, a+\delta),\ x \neq a$

si ha

$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$

Per 2 variabili



$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$

$\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ t.c.

$\forall\, (x,y) \in$ cerchio di centro (a,b) e raggio δ:

$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$

si ha

$L-\varepsilon < f(x,y) < L+\varepsilon$

Il limite, se esiste, è unico.

+5

ES. 5 $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ per $(x,y) \to (0,0)$ tende a 1.

Infatti se passo in coordinate polari $(x = \rho\cos\theta, y = \rho\operatorname{sen}\theta)$ la funzione si riscrive $\dfrac{\operatorname{sen}\rho}{\rho}$ ed è noto che
$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\operatorname{sen}\rho}{\rho} = 1$$
... o, se si preferisce, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$ t.c. se $\rho = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ si ha $\left|\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right| = \left|\dfrac{\operatorname{sen}\rho}{\rho} - 1\right| < \varepsilon$.

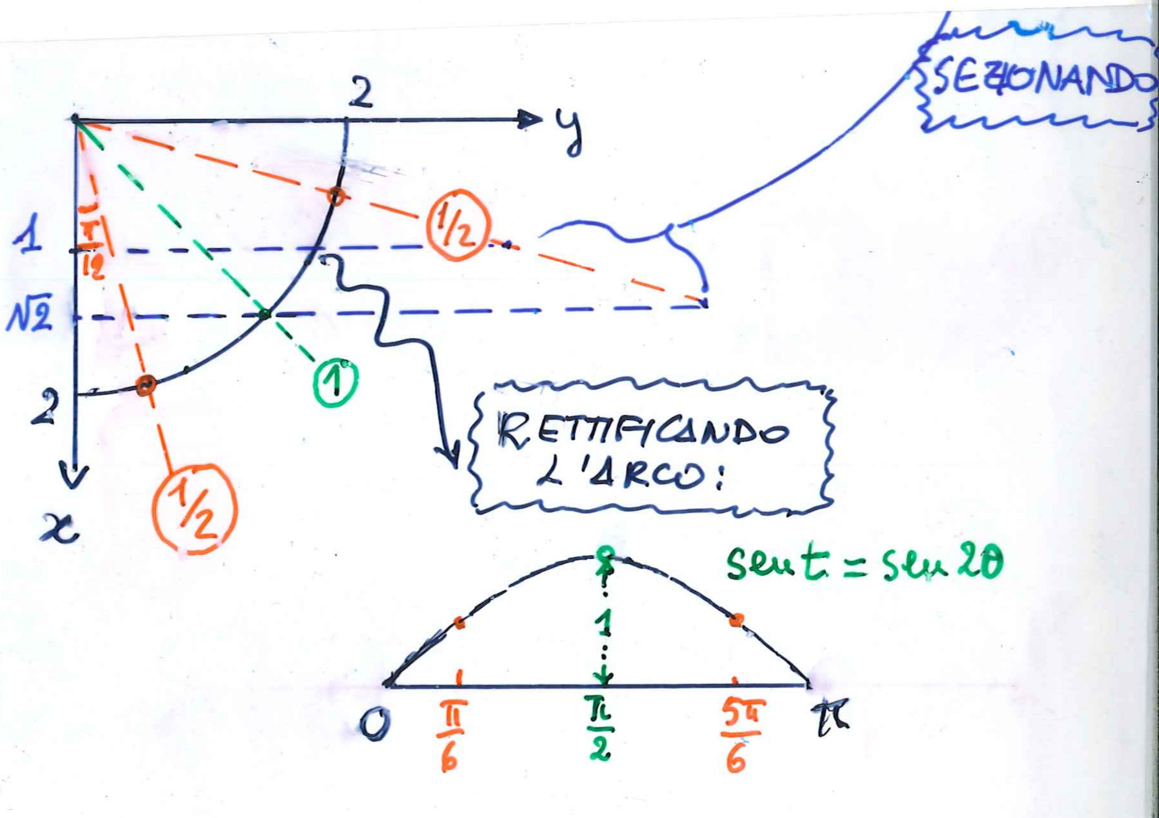
ES. 6 $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$ <u>non esiste</u>.

Per convincercene studiamo $f(x,y)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq 0 \\ ? & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Possiamo

1) passare in coordinate polari $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\operatorname{sen}\theta$ e questo mostra che a parità di θ il valore è lo stesso $\forall\rho$ ($2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen} 2\theta$). In particolare vale 0 sugli assi, 1 sulla bisettrice del 1°-3° quadrante, -1 sull'altra.
Inoltre i valori assunti sui raggi uscenti dall'origine in ogni quadrante sono simmetrici rispetto alla bisettrice corrispondente.
Questo porta alla visualizzazione del grafico come insieme di semirette con origine in z, parallele al piano xy che passano per la curva $\operatorname{sen}\theta$ disegnata su un cilindro di raggio 2



SEZIONANDO
2
y
1/2
1
π/12
√2
1
2
x
1/2
RETTIFICANDO L'ARCO:
sen t = sen 2θ
1
0
π/6
π/2
5π/6
π

ATTENZIONE: la situazione può anche essere più aggrovigliata

ES.7 $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$: anche qui i problemi sorgono per $(x,y) \to (0,0)$.

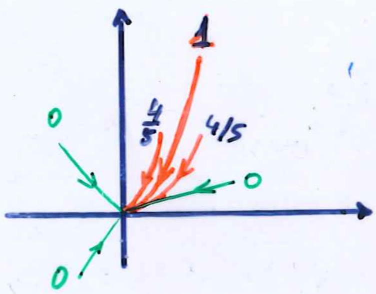
Se mi muovo lungo raggi uscenti dall'origine: $y = mx$, trovo $f(x, mx) = \frac{2mx^3}{x^4+m^2x^2} = \frac{2mx}{m^2+x^2}$

che vale 0 se $m=0$, mentre se $m \neq 0$ tende a 0 per $x \to 0$ (e $(x, mx) \to (0,0)$).

MA QUESTO NON BASTA A GARANTIRE L'ESISTENZA DEL LIMITE perché io posso andare verso $(0,0)$ lungo curve diverse.

Se ci vado lungo la parabola $y = kx^2$ trovo

$f(x, kx^2) = \frac{2kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{2k}{1+k^2} \neq 0$ (se $k \neq 0$, cioè se ho una vera parabola)



$k=1 \Rightarrow f(x, kx^2) = 1$

$k=2 \Rightarrow f(x, kx^2) = 4/5$

$k=1/2 \Rightarrow f(x, kx^2) = 4/5$

Tutte le parabole entrano in $(0,0)$ TANGENTI a $y=0$ (retta su cui la funzione si annulla) ma con un piccolo contributo in più.

Questo esempio fa capire perché preferire l'(ε,δ)-definizione: permette di dimenticarsi di "COME" si entra nell'origine.

ES.8 Invece $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

Si vede bene con le coord. polari!

Infatti:

$$|f(x,y) - 0| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

Dunque se prendo $\delta = \varepsilon$, ogni volta che $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$ anche $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$

$f(x,y)$ è detta continua nel punto (a,b) se $f(x,y)$ è

- definita in (a,b) e in un suo intorno $U=\{(x,y):\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\rho\}$
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Esempi di funzioni continue: 1, 2, 3, 4 ; 5 se completo la def. ponendo $f(0,0)=1$; 8 se completo la def. ponendo $f(0,0)=0$.

Per le funzioni continue in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ valgono teoremi analoghi a quelli delle funz. di 1 variabile. In particolare:

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua su un sottoinsieme chiuso e limitato di E (ad esempio su un disco, circonferenza compresa). Allora

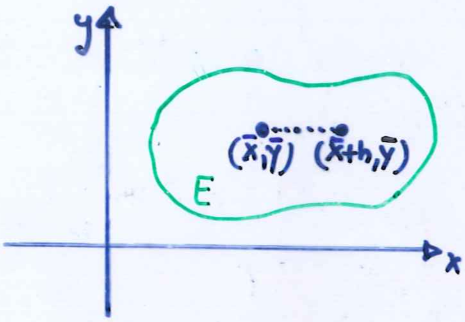
- l'immagine mediante f di tale s.i. limitato è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$
- esistono punti del s.i. chiuso e limitato di E in cui f assume valore massimo e valore minimo

L'esempio 1 e l'esempio 3 se tolgo la circonferenza da E mostrano che l'ipotesi che E (o un ~~suo~~ sottoinsieme) sia limitato e sia chiuso sono entrambe necessarie.

Dagli esempi è chiaro che la continuità in dimensione >1 è cosa delicata. A maggior ragione lo sarà l'approssimazione lineare che vogliamo fare per studiare min. e MAX relativi.

DERIVATE PARZIALI

$f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua in E. Siano $(\bar{x},\bar{y}) \in E$; $h \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo in valore assoluto perchè $(\bar{x}+h,\bar{y}) \in E$.



Se esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h,\bar{y}) - f(\bar{x},\bar{y})}{h}$$

dirò che esso è <u>la derivata parziale di f rispetto a</u> x nel punto $(\bar{x},\bar{y})$ e la denoterò con

$$f_x(\bar{x},\bar{y}) \quad o \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) \quad o \quad D_x f(\bar{x},\bar{y})$$

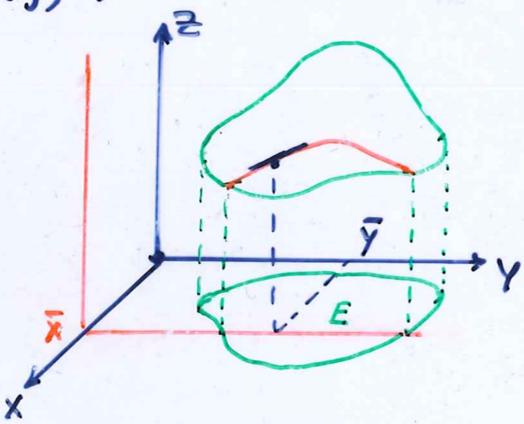
È come tenere fisso y in $f(x,y)$ e pensare f come funzione della sola x.

Analogamente se $k \in \mathbb{R}$ è abbastanza piccolo in valore assoluto perchè $(\bar{x},\bar{y}+k) \in E$ ed esiste finito

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(\bar{x},\bar{y}+k) - f(\bar{x},\bar{y})}{k} := f_y(x,y)$$

dico che il limite è la <u>derivata parziale di</u> f <u>rispetto a y</u> in $(\bar{x},\bar{y})$

Ovviamente la derivata parziale di f rispetto a y in $(\bar{x},\bar{y})$ è il coeff. angolare della retta tangente in $(\bar{x},\bar{y})$ alla curva sezione del grafico di $f(x,y)$ con il piano $x=\bar{x}$ (similmente $f_x(\bar{x},\bar{y})$)

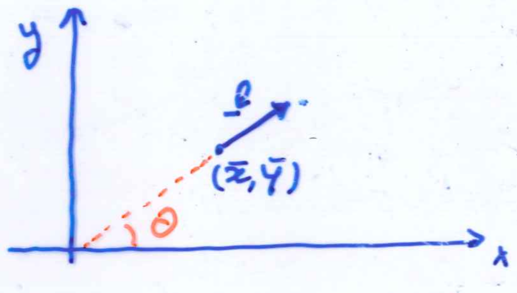


$$\begin{cases} z - f(\bar{x},\bar{y}) = f_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}) \\ x = \bar{x} \end{cases}$$

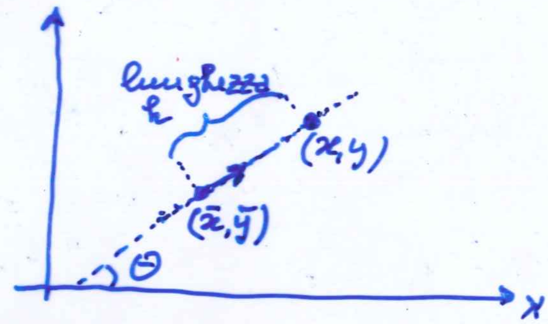
Quindi $f_y(x,y)$ misura la velocità di variazione della quota $z=f(x,y)$ quando (x,y) si muove nella direzione dell'asse y ....

Se volessi la velocità di variazione della quota muovendosi in una direzione diversa da quella degli assi dovrei:

1) indicare un versore della direzione: $\underline{\ell} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$



2) individuare il punto variato attraverso questo versore



$$\begin{cases} x - \bar{x} = h\cos\theta \\ y - \bar{y} = h\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = \bar{x} + h\cos\theta \\ y = \bar{y} + h\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

3) calcolare il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{|h| \to 0^+} \frac{f(\bar{x} + h\cos\theta, \bar{y} + h\operatorname{sen}\theta) - f(\bar{x}, \bar{y})}{|h|}$$

Se esiste finito questo limite sarà detto derivata di f in direzione $\underline{\ell}$ nel punto $(\bar{x}, \bar{y})$ e denotato con $\dfrac{\partial f}{\partial(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}$

In ipotesi opportune questa definizione può essere semplificata (vedi pag. successiva)

1^a oss. Se in $(\bar{x},\bar{y})$ sono definite entrambe le derivate parziali, è definito un vettore che ha tali derivate come componenti. Esso sarà detto GRADIENTE di f in (x,y):

$$\text{grad } f\,(\bar{x},\bar{y}) = (f_x(\bar{x},\bar{y}),\ f_y(\bar{x},\bar{y}))$$

Es
$$f(x,y) = (x+y)e^{xy}$$
$$f_x(x,y) = e^{xy} + (x+y)(y e^{xy}) = e^{xy}(1+xy+y^2)$$
$$f_y(x,y) = e^{xy}(1+xy+x^2)$$

$$\text{grad } f\,(x,y) = e^{xy}(1+xy+y^2,\ 1+xy+x^2)$$

Esso vale $(1,1)$ nell'origine e in generale $(1, 1+x^2)$ in $(x,0)$.

2^a oss. Supponiamo che in ogni (x,y) interno a E esistano le derivate f_x, f_y e siano funzioni CONTINUE in E.
Sia $\underline{\ell} = \underline{\ell}(x,y)$ un versore definito in (x,y).

La derivata di f nella direzione di $\underline{\ell}$ nel punto (x,y) è il prodotto scalare

$$(\text{grad } f)\cdot \underline{\ell} := \frac{\partial f}{\partial \underline{\ell}}(x,y)$$

se $\underline{\ell} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$= f_x(x,y)\cdot\cos\theta + f_y(x,y)\cdot\operatorname{sen}\theta$

Ovviamente $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{i}} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{j}} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

NOTA Questo non è proprio la definizione di derivata direzionale ... ma le è equivalente nelle ipotesi fatte. Come detto, In generale se $\underline{\ell} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ la derivata in direzione $\underline{\ell}$ di f in $(\bar{x},\bar{y})$ è:

$$\frac{\partial f}{\partial(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)}(\bar{x},\bar{y}) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(\bar{x}+h\cos\theta,\bar{y}+h\operatorname{sen}\theta) - f(\bar{x},\bar{y})}{h}$$

La derivata di f nella direzione $\underline{\ell}$ in $(\bar{x},\bar{y})$ misura la velocità di variazione della quota muovendosi da $(\bar{x},\bar{y})$ nella direzione del versore $\underline{\ell}$

Detto α l'angolo tra grad$f$ e $\underline{\ell}$ (nel punto $(\bar{x},\bar{y})$) si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\ell}} = \operatorname{grad} f \cdot \underline{\ell} = |\operatorname{grad} f| \cos\alpha$$

ed è quindi massima se grad$f$ e $\underline{\ell}$ hanno ugual direzione e verso, minima se la direzione è = ma il verso opposto e nulla se sono ortogonali.

Dunque grad$f$ calcolato in (x,y) dà la direzione di massima pendenza del grafico in (x,y); un versore ad esso ortogonale individua la direzione in cui non c'è variazione di pendenza ($\Rightarrow$ curva di livello ... cammino in quota)

Leggere una carta geografica in quest'ottica.

ATTENZIONE Una funzione di due (o più) variabili può avere derivate direzionali in tutte le direzioni in un certo punto e con tutto ciò NON ESSERE CONTINUA nel punto. Ad es.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

non è continua in $(0,0)$ (vedi es. 7)

ma per ogni versore $\underline{\ell} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\ell}}(0,0) = \lim_{h\to 0+} \left(\frac{2(h\cos\theta)^2(\cancel{h}\operatorname{sen}\theta)}{h^4\cos^4\theta + h^2\operatorname{sen}^2\theta} \right) \cdot \frac{1}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0+} \frac{2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{h^2\cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta}$$

che se $\operatorname{sen}\theta = 0$ vale 0

se $\operatorname{sen}\theta \neq 0$ vale $2\dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

Ciò è legato alla <u>non continuità delle derivate parziali in $(0,0)$</u>

Ad es. $f_y = \dfrac{2x^2(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2} = \dfrac{2\rho^4(\cos\theta)^2(\rho^2\cos^4\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}{\rho^4(\rho^2\cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta)^2}$

andando a $(0,0)$ lungo l'asse x $(\theta=0)$ si comporta come $2/\rho^2$ e quindi $\to +\infty$, mentre andandoci lungo l'asse y $(\theta=\frac{\pi}{2})$ tende a 0.

Invece se - come abbiamo supposto parlando di gradiente - le derivate parziali f_x e f_y sono continue in $(\bar{x},\bar{y})$ si riesce a ricavare un risultato più forte della continuità di $f(x,y)$ in $(\bar{x},\bar{y})$. Precisamente

Se f_x e f_y sono continue in $(\bar{x},\bar{y})$ allora

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(\bar{x}+h,\bar{y}+k)-f(\bar{x},\bar{y})-hf_x(\bar{x},\bar{y})-kf_y(\bar{x},\bar{y})}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$ VEDI +11.1

cioè la funzione $f(x,y)$ è <u>differenziabile</u> in $(\bar{x},\bar{y})$

(e in tal caso è <u>continua</u> in $(\bar{x},\bar{y})$ poiché

$(\bullet)$ $f(\bar{x}+h,\bar{y}+k)=f(\bar{x},\bar{y})+hf_x(\bar{x},\bar{y})+kf_y(\bar{x},\bar{y})+o(\sqrt{h^2+k^2})$ ...)

Differenziabilità significa che in $(\bar{x},\bar{y})$ la funzione $f(x,y)$ può essere approssimata con un polinomio di 1° grado in x,y o - come si suol dire - può essere LINEARIZZATA.

Graficamente ciò significa che il grafico della funzione in prossimità di $(\bar{x},\bar{y})$ può essere approssimato con un piano "tangente" in $(\bar{x},\bar{y})$ al grafico. Tale piano ha equazione (vedi $(\bullet)$)

$$z-f(\bar{x},\bar{y})=f_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})+f_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}).$$

Notiamo che il suo vettore direzionale ha la forma

$$((\text{grad } f)(\bar{x},\bar{y}) \mid -1).$$ Vedi +11.2 +11.3

Es. $f(x,y)=x\ln(xy)$ (definita nel 1° e nel 3° quadrante)

$f_x=\ln(xy)+x\cdot\frac{1}{x}=\ln(xy)+1$; $f_y=\frac{x}{y}$

Il piano Tangente al grafico nel punto di ascissa e ordinata 1 ($\Rightarrow f(1,1)=0$, $f_x=1$, $f_y=1$) è

$z=(x-1)+(y-1)$.

Considero l'enunciato del teor. di differenzialità:

f_x, f_y cont. in $(\bar{x},\bar{y}) \Rightarrow$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(\bar{x}+h,\bar{y}+k)-f(\bar{x},\bar{y})-f_x(\bar{x},\bar{y})\cdot h-f_y(\bar{x},\bar{y})\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

1°) $\sqrt{h^2+k^2} = |(h,k)|$ esprime la distanza tra $(\bar{x},\bar{y})$ e il punto variato $(x,y)=(\bar{x}+h,\bar{y}+k)$.

2°) la formula è in tutto simile a quella incontrata nel lemma fondamentale

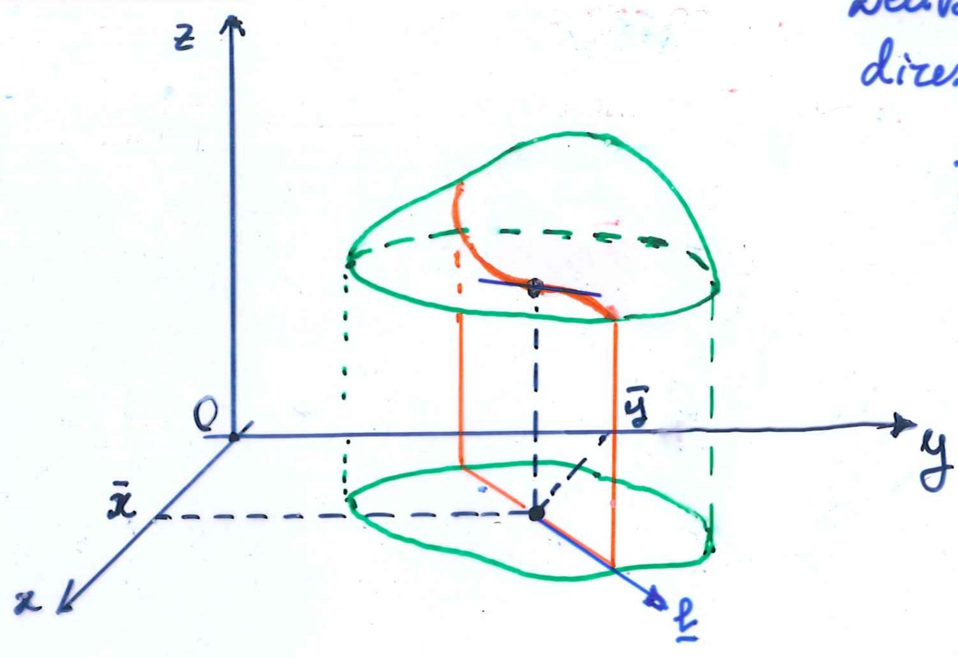
se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è derivabile in $\bar{x}\in(a,b)$ allora

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})-f'(\bar{x})\cdot h}{h}=0$$

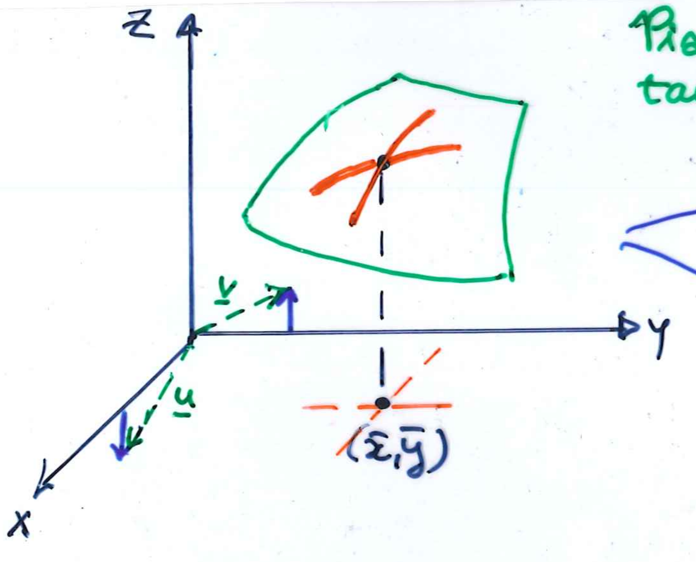
(sostituire $k=0$ nella formula precedente e pensare $\bar{y}$ come parametro). Quindi fornisco indicazioni simili (approssimazioni lineare della funzione ... teor. di Taylor...)

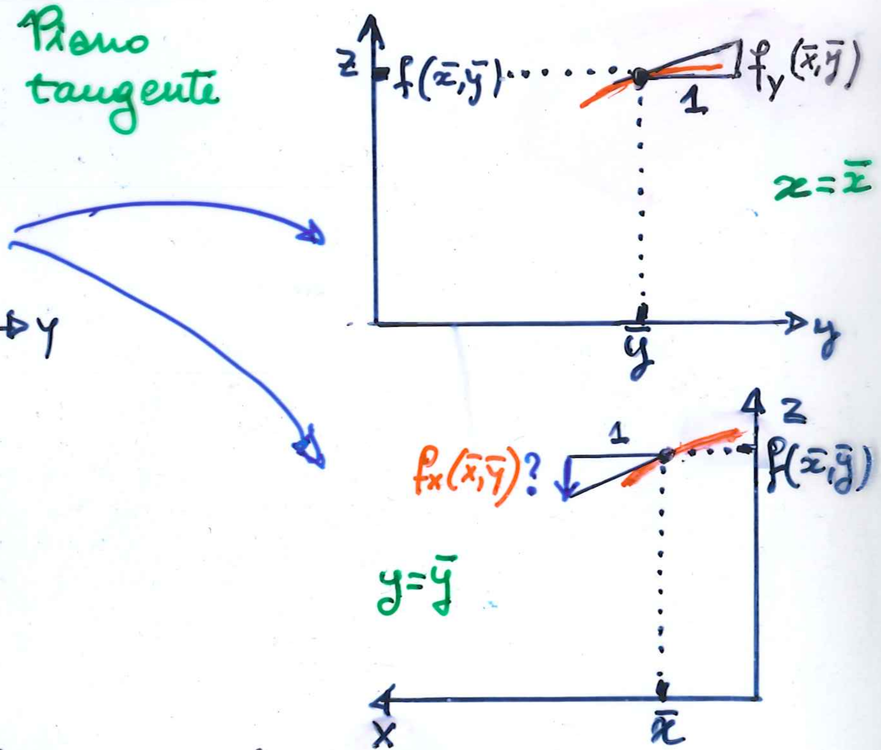
Derivata direzionale

$f_{\underline{\ell}}(\bar{x},\bar{y})$



Piano tangente





$\underline{u} = (1, 0, f_x(\bar{x},\bar{y}))$

$\underline{v} = (0, 1, f_y(\bar{x},\bar{y}))$

il vettore direzione del piano che contiene $\underline{u}$, $\underline{v}$

è $\underline{u} \wedge \underline{v}$

Come ricavare l'equazione del piano tangente.
al grafico di $f(x,y)$ nel punto $A=(\bar{x},\bar{y},f(\bar{x},\bar{y}))$

1°) ha un'equazione del tipo

$$a(x-\bar{x})+b(y-\bar{y})+c(z-f(\bar{x},\bar{y}))=0$$

e il vettore (a,b,c) è ortogonale al piano.

2°) seca sui piani paralleli a yz e a xz rette che sono tangenti in A alle curve sezione del grafico con i piani stessi e (PAG. +8) hanno equazioni del tipo

$$\begin{cases} x=\bar{x} \\ z-f(\bar{x},\bar{y})=f_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y=\bar{y} \\ z-f(\bar{x},\bar{y})=f_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ vettori direttori $\underline{v}=(0,1,f_y(\bar{x},\bar{y}))$ e $\underline{u}=(1,0,f_x(\bar{x},\bar{y}))$

Quindi il vettore direttore del piano tangente è

$$\underline{u}\wedge\underline{v}=\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & f_x(\bar{x},\bar{y}) \\ 0 & 1 & f_y(\bar{x},\bar{y}) \end{vmatrix}=(-f_x(\bar{x},\bar{y}),-f_y(\bar{x},\bar{y}),1)$$

e l'eq. del piano tangente è

$$-f_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})-f_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y})+z-f(\bar{x},\bar{y})=0$$

Poiché per ipotesi f_x e f_y sono continue, la $f(x,y)$ è differenziabile in $(\bar{x},\bar{y})$ e quindi si può scrivere (porre $h=x-\bar{x}$ e $k=y-\bar{y}$)

$$f(x,y)=f(\bar{x},\bar{y})+f_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})+f_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y})+o\left(\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}\right)$$

Confrontando con l'eq. del piano tangente in A:

$$z=f(\bar{x},\bar{y})+f_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})+f_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y})$$

si vede che il punto del piano tangente di ascissa x ordinata y ha quota che differisce da $f(x,y)$ per $o\left(\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}\right)$