gennaio 2017

$$f(x) = 2(x-3)\sqrt{\frac{2}{3}x} + 3$$

a) I.D. - limiti - asintoti

I.D. $[0,+\infty)$

$f(0) = -6 \cdot 0 + 3 = 3$; $f(x)$ è continua da destra $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{come } 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot x^{3/2}$$

$\Rightarrow$ non ci sono asintoti obliqui (né orizz. poiché il lim. è $+\infty$)

b) intervalli di monotonia, punti estremanti, valori assunti in essi:

$$f'(x) = 2\left[\sqrt{\frac{2}{3}x} + (x-3)\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right] =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\left(x + \frac{x-3}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{3x}}\,(3x-3) > 0$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f' \text{ è definita} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0,+\infty) \\ x > 1 \end{cases}$

$f' < 0$ in $(0,1)$: in $(0,1)$ f decresce ↘

$f' > 0$ in $(1,+\infty)$: in $(1,+\infty)$ f cresce ↗

in $x = 1$ c'è un minimo relativo ; $f(1) = -4\sqrt{\frac{2}{3}} + 3$

Domanda: il valore del minimo è positivo o negativo

$$f(1) = 3 - 4\sqrt{\frac{2}{3}} > 0 \iff$$

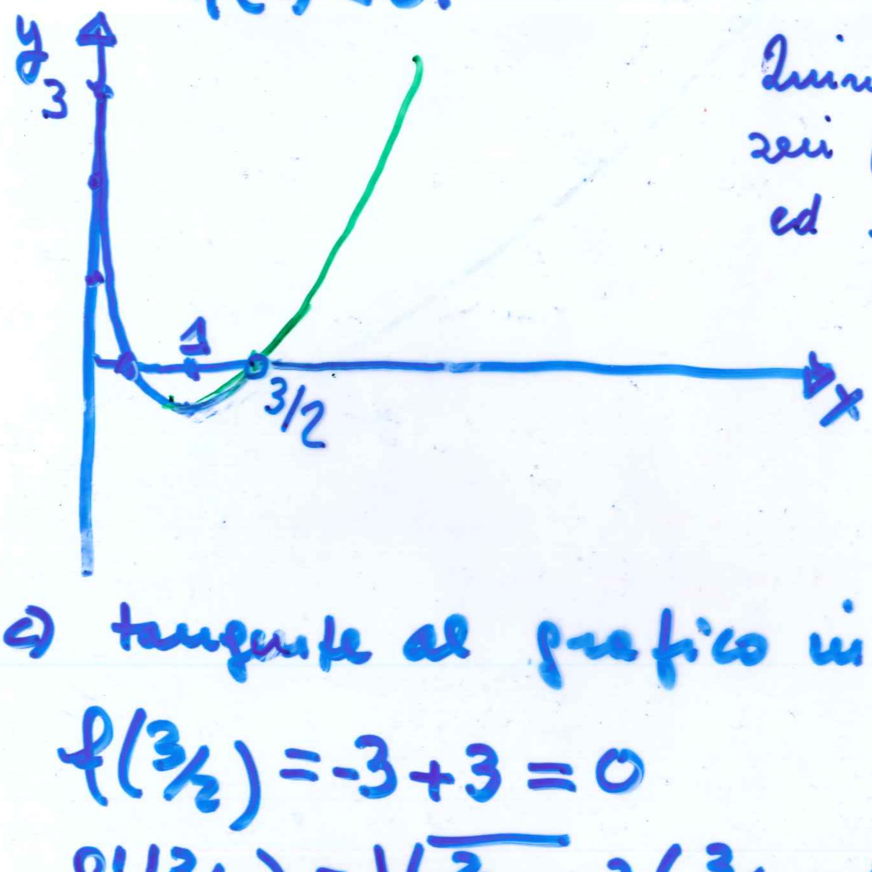
no

$$3 > 4\sqrt{2/3} \iff$$

$$9 > 16 \cdot \frac{2}{3} \iff 27 > 32$$

NO

$$f(1) < 0.$$



Quindi per il teorema degli zeri (essendo $f(x)$ continua ed essendo $f(0) = 3 > 0$, $f(1) < 0$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$) la funzione avrà ALMENO DUE ZERI (e solo 2 per la monotonia)

c) tangente al grafico in $P = (3/2, f(3/2))$

$$f(3/2) = -3 + 3 = 0$$

$$f'(3/2) = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot 3/2}} \cdot 3 \cdot (3/2 - 1) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

equazione

$$y - 0 = 1(x - 3/2) \Rightarrow y = x - 3/2$$

3

d) $f'(x) = \sqrt{\frac{6}{x}}\,(x-1) = \sqrt{6}\cdot\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right) =$

$$= \sqrt{6}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \sqrt{6}\left(\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{2x\sqrt{x}}}_{>0}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\,\frac{x+1}{x\sqrt{x}} > 0 \text{ nell'I.D.}$$

$f(x)$ è convessa in $(0, +\infty)$

e) Zeri e segno

$$f(x) = 2(x-3)\sqrt{\tfrac{2}{3}x} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\sqrt{\tfrac{2}{3}x} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2/3}\,(x-3)\sqrt{x} + 3/2 = 0 \qquad \sqrt{x} = t$$

$$\sqrt{2/3}\cdot t^3 - \sqrt{6}\,t + 3/2 = 0 \qquad t_0 = \sqrt{3/2}$$

è uno zero

$$\begin{array}{c|ccc|c} & \sqrt{2/3} & 0 & -\sqrt{6} & 3/2 \\ \sqrt{3/2} & & 1 & \sqrt{3/2} & 3/2 - 3 \\ \hline & \sqrt{2/3} & 1 & -\sqrt{6} + \sqrt{6/4} & 0 \end{array}$$

$$\frac{-2\sqrt{6} + \sqrt{6}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

(4

$$\sqrt{2/3}\, t^2 + t - \sqrt{\tfrac{3}{2}} = 0$$

$$t^2 + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, t - \tfrac{3}{2} = 0$$

$$t = \frac{-\sqrt{3/2} \pm \sqrt{3/2 + 4 \cdot 3/2}}{2} = \frac{-\sqrt{\tfrac{3}{2}} \pm \sqrt{5}\sqrt{\tfrac{3}{2}}}{2}$$

$t_2 = - -$ da scartare perchè < 0

$$t_1 = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \sqrt{3/2}$$

$$t_1 = \sqrt{x_1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} \cdot \frac{3}{2}$$

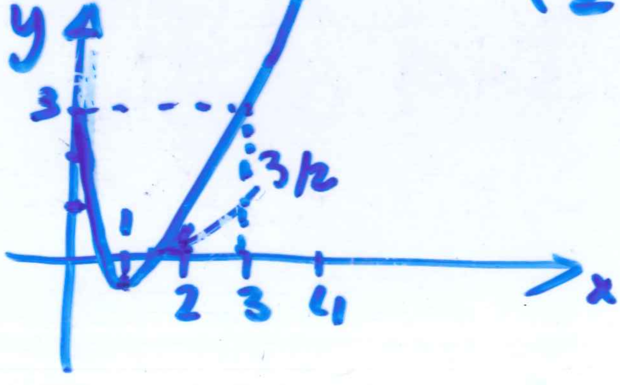
$$= \frac{(3-\sqrt{5})\,3}{4}$$

Segno

$f(x) > 0$ in $\left[0, \frac{3(3-\sqrt{5})}{4}\right)$

$f(x) < 0$ in $\left(\frac{3(3-\sqrt{5})}{4}, \frac{3}{2}\right)$

$f(x) > 0$ in $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$



$(1, f(1))$ è anche Min. assoluto

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x^2)-1+\cos 2x}{x^4} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Poiché $x\to 0$ uso gli sviluppi di MacLaurin

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

probabilmente sovrabbondante (basta arrestarsi al 2° ordine)

$$\Downarrow$$

$$\ln(1+2x^2) = (2x^2) - \frac{(2x^2)^2}{2} + \frac{(2x^2)^3}{3} + o(x^6) =$$

$$= 2x^2 - 2x^4 + \frac{8}{3}x^6 + o(x^6)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + o(t^6)$$

$$\Downarrow$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + o(x^6) =$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6)$$

anche in questo caso forse basta arrestarsi al 4° ordine.

Sostituisco:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\left(\cancel{2x^2} - 2x^4 + \frac{8}{3}x^6 + o(x^6) - \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{2x^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\left(-\frac{4}{3}x^4 + \underbrace{\frac{116}{45}x^6 + o(x^6)}\right) = -\frac{4}{3}$$

inutile poiché il coefficiente $-\frac{4}{3}$ di x^4 è diverso da zero.
Avrei potuto arrestare entrambi gli sviluppi al 4° ordine, pensando $\frac{8}{3}x^6 + o(x^6) = o(x^4)$

$$-\frac{4}{45}x^6 + o(x^6) = o(x^4);$$

quindi anche la loro somma è $o(x^4)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(2x) + 2e^{-x} - 2\sqrt{1+x^2}}{x^3} = ?\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \qquad t = 2x$$

$$\arctan 2x = 2x - \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \qquad t = -x$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2}$$

Ricordo

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + o(t^3)$$

e quindi

$$(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$$

$t = x^2$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\Big(\cancel{2x} - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) + \cancel{2} - \cancel{2x} + \cancel{x^2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + {}$$
$$- \big(\cancel{2} + \cancel{x^2} - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\big)\Big) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(-3x^3 + o(x^3) + \boxed{\frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}\right) = -3$$

$$\int 6x^3 \ln(2x^2-1)\,dx =$$

ID della integranda $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$

È continua in ciascuno dei 2 intervalli

$\Rightarrow$ le primitive sono definite o su $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ o su $(1/\sqrt{2}, +\infty)$

osservo:

$(2x^2-1)' = 4x$

Sostituisco $x^2 = t$

$2x\,dx = dt$

$$= \int 3t \ln(2t-1)\,dt = \text{pp FF } \ln(2t-1)$$

$$= 3\left(\frac{t^2}{2}\ln(2t-1) - \int \frac{t^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{2t-1}\,dt\right) =$$

Divido $2t^2$ per $2t-1$

$$\begin{array}{l|l} 2t^2 & 2t-1 \\ \hline -2t^2+t & t+\frac{1}{2} \\ \quad t & \text{quoziente} \\ \quad -t+1/2 & \\ \hline \quad 1/2 \text{ Resto} & \end{array}$$

$$= 3\left(\frac{t^2}{2}\ln(2t-1) - \frac{1}{2}\left(\int \left(t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2t-1}\right)dt\right)\right) =$$

$$= 3\left(\frac{t^2}{2}\ln(2t-1) - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\ln(2t-1)\right) + c$$

$$= 3\left(\frac{x^4}{2}\ln(2x^2-1) - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\ln(2x^2-1)\right) + c.$$

Si stabilisce se per $x \to -\infty$ la funzione $3x - \sqrt{4x^2+5x+1} = f(x)$ ha asintoto ed eventualmente calcolarne l'equazione.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x - \sqrt{4x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 3x - 2|x| = \qquad |x| = -x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 5x = -\infty$$: l'asintoto se c'è è obliquo e ha coeff. ang. 5

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{x} = 5 = m$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - 5x =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\left(+2x + \sqrt{4x^2+5x+1}\right) = \text{RAZION.}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{-4\cancel{x^2} + 4\cancel{x^2} + 5x + 1}{-2x + \sqrt{4x^2+5x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{5x+1}{2x+2x+o(x)} = 5/4$$

$\Rightarrow$ Eq. asint. : $y = 5x + 5/4$.

I febbraio 2012

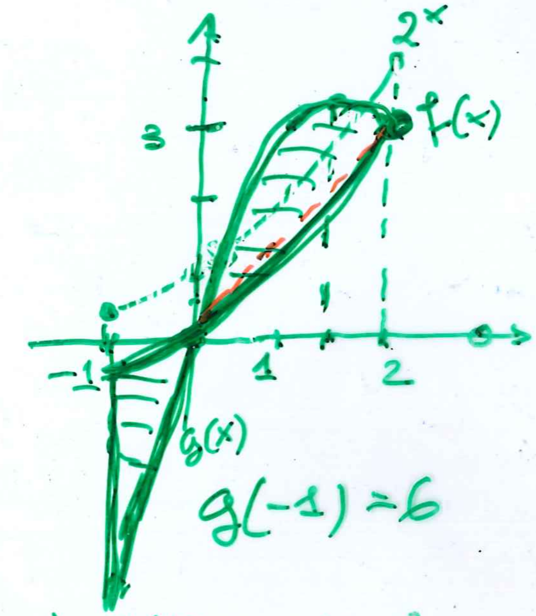
$f(x) = 2^x - 1 \quad g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$

limitatamente a $I = [-1, 2]$

e se ne trovino le intersez.

R: tra grafici di f e g e

$x=-1$ e $x=2$. Area



$f(x) = 2^x - 1$ esponenz. di base >1

$\Rightarrow$ crescente

$f(-1) = \frac{1}{2} - 1 \quad f(2) = 4 - 1 = 3$

è sempre >0. Convessa

$g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$

ha per grafico una parabola concava che interseca l'asse x se

$-\frac{3}{2}(x^2 - 3x) = 0$: $x=0$ ($x=3$ fuori I)

$\Rightarrow$ asse : $x = 3/2$ $\Rightarrow$ vertice $(3/2, g(3/2)) = (3/2, 27/8)$

$g(1) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3 = g(2)$

Punti intersez. : $A=(0,0)$, $B=(2,3)$

Altri punti di intersez? no poiché f è convessa (sta sotto il segmento AB) e g è concava
(" sopra ")

$$\text{Area} = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{\ln 2} 2^x - x + \frac{x^3}{2} - \frac{9}{4}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{9}{4}x^2 - \frac{x^3}{2} + x - \frac{1}{\ln 2} 2^x\right]_{0}^{2}$$