$f(x,y) = \sqrt{x^2 y} - x - y$

è definita in $\underset{(x,y)}{\mathbb{R} \times [0,+\infty)} = E$

ed è ivi continua.

Non si riduce a $|x|\sqrt{y} - x - y$ se non ci si vuol complicare la vita.

Calcolo la derivata parziale rispetto a x

$$f_x(x,y) = \frac{D_x(x^2y)}{2\sqrt{x^2y}} - 1 - 0 = \frac{2xy}{2\sqrt{x^2y}} - 1 =$$

$$= \frac{xy}{|x|\sqrt{y}} - 1 =$$

$$= (\operatorname{sgn} x)\sqrt{y} - 1$$

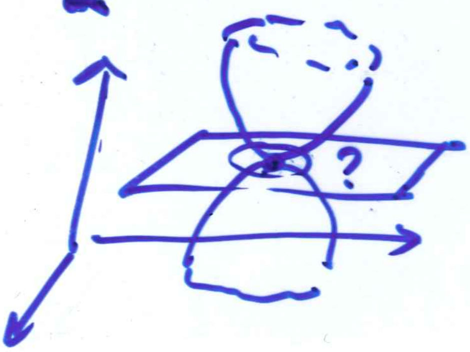
$$f_y(x,y) = \frac{D_y(x^2y)}{2\sqrt{x^2y}} - 0 - 1 = \frac{x^2}{2|x|\sqrt{y}} - 1 = \frac{|x|}{2\sqrt{y}} - 1$$

Eq. del piano tangente al grafico in $(2, 1, f(2,1))$

$f(2,1) = 2 - 2 - 1 = -1$

$f_x(2,1) = \frac{4}{2 \cdot 2} - 1 = 1 - 1 = 0 \quad f_y(2,1) = \frac{2}{2 \cdot 1} - 1 = 0$

$z - (-1) = 0(x-2) + 0(y-1)$ cioè $\boxed{z = -1}$



domanda sarà un massimo/minimo locale o sarà l'analogo di un punto di sella (vedi paraboloide)

Derivate seconde

Supponiamo che in ogni punto interno di E sia definita f_x e f_y e che queste funzioni abbiano derivate parziali rispetto a x e a y : nascono quattro derivate seconde

$$f_{xx} = (f_x)_x \,, \quad f_{xy} = (f_x)_y \quad f_{yx} = (f_y)_x \quad f_{yy} = (f_y)_y$$

che talora vengono anche indicate così:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \,, \quad \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}_{\text{derivate miste}} \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Nell'esempio precedente : $f(x,y) = x \ln(xy)$, si ha

$f_{xx} = (\ln(xy)+1)_x = \frac{1}{x}$; $f_{xy} = (\ln(xy)+1)_y = \frac{1}{y}$

$f_{yx} = \left(\frac{x}{y}\right)_x = \frac{1}{y}$; $f_{yy} = \left(\frac{x}{y}\right)_y = -\frac{x}{y^2}$

Notiamo che in questo caso $f_{xy} = f_{yx}$. Vale in proposito il

TEOREMA di SCHWARZ : Se le derivate parziali f_x, f_y sono continue in un intorno di $(\bar{x},\bar{y})$ e le derivate miste f_{xy} , f_{yx} sono continue in $(\bar{x},\bar{y})$ allora $f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = f_{yx}(\bar{x},\bar{y})$.

Ma consideriamo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

. In ogni punto $(x,y) \neq (0,0)$ RISULTA:

$f_x(x,y) = 2\dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$; $f_y(x,y) = 2\dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2\dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}$.

Ma in (0,0) - calcolando le derivate come lim. del rapp. incr. RISULTA:

$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{0}{h^2} = 0$; $f_y(0,0) = \dots = 0$

$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \dfrac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \dfrac{-2k^5}{k^4 \cdot k} = -2$. $f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{2h^5}{h^4 \cdot h} = 2$

Le derivate miste in (0,0) sono diverse!! Infatti la funz. $f_{xy}(x,y)$ non è continua in (0,0)!

Ottimizzazione delle funzioni di 2 variabili

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto interno ad E.
Esso si dice punto di massimo locale se esiste un cerchio con centro in $(\bar{x}, \bar{y})$ e raggio $\delta > 0$, contenuto in E

$$B_\delta(\bar{x}, \bar{y}) = \{ (x,y) \in E \mid \sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2} < \delta \}$$

tale che per tutti gli $(x,y) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ si abbia
diversi da $(\bar{x}, \bar{y})$

$$f(x,y) \leq f(\bar{x}, \bar{y})$$

Analogamente per il minimo locale.
Si dice che il massimo (o il minimo) è forte se vale $\underset{\neq}{<}$ $\left(\underset{\neq}{>}\right)$

Vale un analogo del teorema di Fermat (in 1 variabile):

TEOR. Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione con f_x, f_y continue in $(\bar{x}, \bar{y})$, punto interno a E. Se in $(\bar{x}, \bar{y})$ la f ha massimo locale (o minimo locale) allora il gradiente di f in $(\bar{x}, \bar{y})$ è nullo.

La cosa è abbastanza logica, poichè mi aspetto che ci sia un piano tangente e mi aspetto che tale piano sia // xOy.
Il teorema precedente è una condizione necessaria: dice tra quali punti cercare gli estremi locali (qualora f sia differenziabile). I punti a gradiente nullo sono detti PUNTI CRITICI: tra essi bisogna distinguere i veri punti estremanti dai punti di sella. Allo scopo si possono guardare le derivate seconde: l'idea che c'è dietro è che si può migliorare l'approssimazione lineare di $f(x,y)$ usando un polinomio di 2° grado invece che di primo:

$$f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) = f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})h + f_y(\bar{x},\bar{y})k + f_{xx}(\bar{x},\bar{y})\frac{h^2}{2} +$$
$$\left(f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) + f_{yx}(\bar{x},\bar{y})\right)\frac{hk}{2} + f_{yy}(\bar{x},\bar{y})\frac{k^2}{2} + o(h^2+k^2) \; ???$$

Proviamo a capire che cosa succede quando $f(x,y)$ è proprio un polinomio di 2° grado

1. $f(x,y) = x^2+y^2$ ha minimo locale (e globale) in $(0,0)$

$f_x = 2x \Rightarrow f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 0$

$f_y = 2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = 2$

2. $f(x,y) = -(x^2+y^2)$ ha massimo locale (e globale) in $(0,0)$

$f_x = -2x \Rightarrow f_{xx} = -2 \quad f_{xy} = 0$

$f_y = -2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = -2$

3. $f(x,y) = x^2-y^2$ ha un punto di sella in $(0,0)$

$f_x = 2x \Rightarrow f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 0$

$f_y = -2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = -2$

È poi chiaro che se in questa funzione sostituisco

$\begin{cases} x-y = \sqrt{2}\,u \\ x+y = \sqrt{2}\,v \end{cases}$ ottengo $g(u,v) = 2uv$ che ha grafico che è solo ruotato del precedente e quindi in $(0,0)$ ha ancora un punto di sella. In questo caso

$g_u = 2v \Rightarrow g_{uu} = 0 \quad g_{uv} = 2$

$g_v = 2u \Rightarrow g_{vu} = g_{uv} = 2 \quad g_{vv} = 0$

Si intuisce quindi che la cosa importante non è il segno della singola derivata seconda. C'è invece un dato che distingue i primi 2 casi dai secondi 2: nel caso 1 e nel caso 2

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx} > 0 \, ;$$

negli altri due casi il verso della disuguaglianza è opposto.

In effetti, denotato il determinante $\begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \\ f_{yx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) \end{vmatrix}$

con $H_f(\bar{x},\bar{y})$ (Hessiano di f) si dimostra che

TEOR. $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, dotata di derivate parziali 1e e 2e continue. Se $(\bar{x},\bar{y})$ è un punto critico per f (cioè se $(\text{grad} f)(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$)

i) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) < 0$: $(\bar{x},\bar{y})$ non è un estremante

ii) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) > 0$ e $\begin{cases} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) > 0 : (\bar{x},\bar{y}) \text{ è pto di min. locale forte} \\ f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) < 0 : (\bar{x},\bar{y}) \text{ " " MAX " "} \end{cases}$

iii) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) = 0$ si deve procedere ad un'analisi ulteriore.

Un punto critico non estremante viene spesso detto "di sella" anche se la funzione non presenta una vera sella. Vedi $f(x,y) = x^3$ nei punti $(0,y)$.

Nota bene: nelle ipotesi del teorema vale il teor. di Schwartz e quindi $f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = f_{yx}(\bar{x},\bar{y})$

Dunque

$$\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \\ f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) & f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) \end{vmatrix} =$$

$$= f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) - (f_{xy}(\bar{x},\bar{y}))^2$$

Quindi

$$f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) = \mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) + \underbrace{(f_{xy}(\bar{x},\bar{y}))^2}_{\geq 0}$$

Se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) > 0$ deve anche essere

$$f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) > 0$$

cioè le due derivate seconde non miste devono essere concordi $\Rightarrow$ posso valutare se $(\bar{x},\bar{y})$ è min. o MAX locale guardando a piacere il segno di $f_{xx}(\bar{x},\bar{y})$ o quello di $f_{yy}(\bar{x},\bar{y})$.

E certamente non ho un estremo locale se tali derivate sono discordi o se una è nulla.

Calcolo e riconoscimento di punti critici.

$f(x,y) = x(y^2 - x - 1) = xy^2 - x^2 - x$

f polinomio $\Rightarrow$ $f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ sono tutte continue in $\mathbb{R}^2$.

Valgono le condiz. di differenziabilità, Schwartz, ottimizzazione.

↓ FERMAT

1) $\text{grad} f = 0$?

$$\boxed{\begin{aligned} f_x &= y^2 - 2x - 1 \\ f_y &= 2xy \end{aligned}}$$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2x - 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{A = (0,1) \quad B = (0,-1) \quad C = \left(-\tfrac{1}{2}, 0\right)}_{\text{punti critici}} \Leftarrow \begin{cases} y = 0 \\ -2x - 1 = 0 \end{cases}$

2) $f_{xx} = -2 \qquad f_{xy} = 2y$

$f_{yx} = 2y \qquad f_{yy} = 2x$

$H_f = \begin{vmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = -4x - 4y^2.$

$H_f(A) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow A$ punto di sella

$H_f(B) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow B$ punto di sella

$H_f(C) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow C$ estremante locale

$\Rightarrow f_{xx}(C) = -2 < 0$

C MAX locale.

$f(x,y) = x\left(x^2 + \frac{y^2}{9} - 1\right) = x^3 + x\frac{y^2}{9} - x$

$f_x = 3x^2 + \frac{y^2}{9} - 1$

$f_y = \frac{2}{9}xy$

$\Rightarrow \text{grad} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ 3x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = (0,3) \\ B = (0,-3) \end{matrix}$

$\begin{cases} y = 0 \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \\ D = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right) \end{matrix}$

4 punti critici.

$f_{xx} = 6x \qquad f_{xy} = \frac{2}{9}y$

$f_{yx} = \frac{2}{9}y \qquad f_{yy} = \frac{2}{9}x$

A, B punti di sella : $H_f = \begin{vmatrix} 0 & f_{xy} \\ f_{yx} & 0 \end{vmatrix} < 0$

$$H_f(C) = \begin{vmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} > 0 \ ; \ f_{xx}(C) > 0$$

$\Rightarrow$ C minimo locale

$$H_f(D) = \begin{vmatrix} -\frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} > 0 \ ; \ f_{xx}(D) < 0$$

$\Rightarrow$ D MAX locale

Sono entrambi estremanti <u>forti</u> perché il gradiente si annulla in punti isolati.

Compito: individuare e studiare i punti critici di

1) $f(x,y) = (y - x^3)\cdot(4 - x)$

2) $f(x,y) = (x^2 - 2x)\cdot(y + x - 1)$

3) $f(x,y) = (y - x^2 + 1)\cdot(y + x^2 - 1) =$
$= y^2 - (x^2 - 1)^2$

Si determini l'eq. del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = x^4 + 2xy^3 + 3y^4 - \frac{1}{2}x$$

nel punto $(0,0,f(0,0))$.
Il punto $(0,0)$ è un punto di estremo locale per la funzione?

$$f_x = 4x^3 + 2y^3 - \frac{1}{2}$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3$$

$$f(0,0) = 0 \qquad f_x(0,0) = -\frac{1}{2} \qquad f_y(0,0) = 0$$

Eq piano tang: $z - 0 = -\frac{1}{2}(x-0) + 0(y-0)$

$$z = -\frac{1}{2}x$$

No, non può essere un estremo relativo.

Trovare i punti critici e gli estremi locali.

Valgono per il polinomio $f(x,y)$ tutte le ipotesi di continuità necessarie per applicare la teoria dell'ottimizzazione.

$f_x = 4x^3 + 2y^3 - \frac{1}{2}$

$f_y = 6xy^2 + 12y^3$

$$\text{grad} f = 0 \iff \begin{cases} 4x^3 + 2y^3 - 1/2 = 0 \\ y^2(x+2y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^3 = 1/8 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right) = A \qquad \begin{cases} x = -2y \\ -32y^3 + 2y^3 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$B = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{60}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{60}}\right) \Leftarrow \begin{cases} x = -2y \\ y^3 = \frac{-1}{60} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt[3]{60}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt[3]{30}} \end{cases}$$

$f_{xx}(x,y) = 12x^2 \qquad f_{xy}(x,y) = 6y^2$

$f_{yx}(x,y) = 6y^2 \qquad f_{yy}(x,y) = 12xy + 36y^2$

$$H_f(A) = \begin{vmatrix} 12 \cdot 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$ A non si studia con questo strumento.

$$H_f(B) = \begin{vmatrix} 12 \frac{4}{\sqrt[3]{4^2 \cdot 15^2}} & \frac{-6}{\sqrt[3]{60^2}} \\ \frac{-6}{\sqrt[3]{60^2}} & 12\left(\frac{-2}{\sqrt[3]{60^2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{60^2}}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4\cdot 12^2}{\sqrt[3]{60^2}\,\sqrt[3]{60^2}} - \frac{36}{\sqrt[3]{60^4}} > 0$$

$f_{xx}(B) > 0 \Rightarrow$ B minimo locale.

Ma cosa succede in $A = (\frac{1}{2}, 0)$

$$f(A) = \frac{1}{2^4} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 + 3\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3}{16}$$

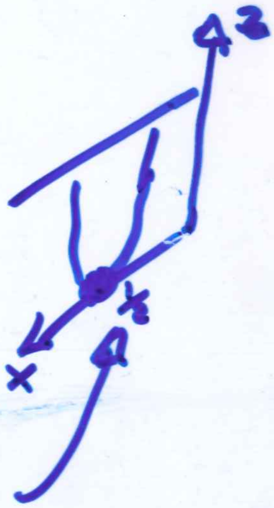
Che cosa succede se provo di tenere fisso x (oppure y) nella funzione

$$f(x,y) = x^4 + 2xy^3 + 3y^4 - \frac{1}{2}x$$

per $y=0$ diventa

$$f(x,0) = x^4 - \frac{1}{2}x$$

$$f_x(x,0) = 4x^3 - \frac{1}{2} \begin{array}{l} > 0 \quad \text{per } x > \frac{1}{2} \\ < 0 \quad \text{per } x < \frac{1}{2} \end{array}$$



Risultato non significativo!

Provo a bloccare $x = 1/2$

$$f(\tfrac{1}{2}, y) = 3y^4 + y^3 - \frac{3}{16}$$

ha derivata (rispetto a y)

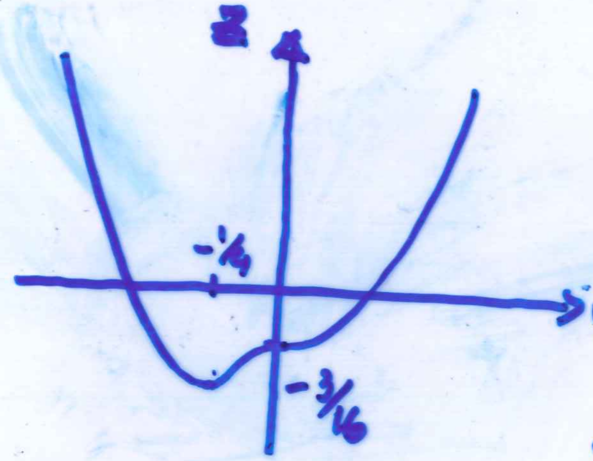
$f_y = 12y^3 + 3y^2 = 3y^2(4y+1) > 0$

per $y > -\frac{1}{4}$. Ma si annulla anche per $y=0$

nel piano

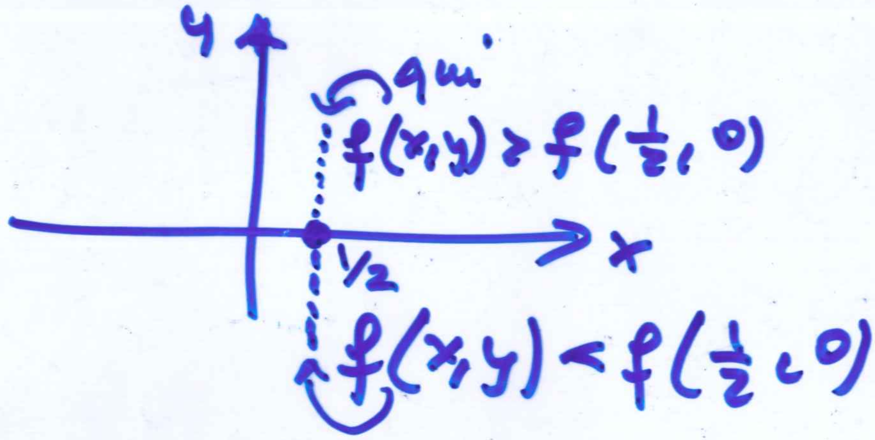
$x = \frac{1}{2}$ il grafico è

quello a lato:



se $y > 0$: $f(\frac{1}{2}, y) > -\frac{3}{16}$

se $y < 0$ $f(\frac{1}{2}, y) < -\frac{3}{16}$



$\Rightarrow$ sella

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$$

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + y^4 - x^3 + x^2 - 2y^2$$

Tanti punti critici ma abbastanza simmetrici da poterli studiare a blocchi e tenendo conto delle equazioni da cui traggono origine.

Risultati degli esercizi 1), 2), 3)

1. $(0,0), (1,1), (-1,-1)$ punti di sella
   $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ min. locali forti
2. $(0,1), (2,-1)$ punti di sella $(f_{yy} \equiv 0)$
3. $(0,0)$ minimo locale forte
   $(1,0), (-1,0)$ punti di sella.

Non svolto a lezione,
ma interessante

Esempio con <u>punto critico ad Hessiano</u> = 0.

$f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 12xy^2 = 4x(x^2-3y^2) \\ f_y = -12x^2y + 4y^3 = 4y(-3x^2+y^2) \end{cases} \Rightarrow \text{unico punto critico } (0,0)$$

$f_{xx} = 12(x^2-y^2) \qquad f_{xy} = -24xy = f_{yx} \qquad f_{yy} = 12(y^2-x^2)$

$$\mathcal{H}_f = \begin{vmatrix} 12(x^2-y^2) & -24xy \\ -24xy & 12(y^2-x^2) \end{vmatrix} \quad \text{per } x=0=y \text{ vale } 0$$

Ma: $f(0,y) = y^4 \Rightarrow$ la sezione con $x=0$ ha minimo in $y=0$

$f(x,x) = -4x^4 \Rightarrow$ la sezione con $y=x$ ha massimo in $x=0$

Dunque $(0,0)$ è un punto di SELLA.

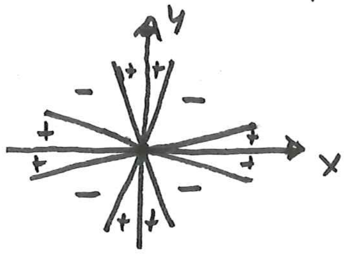
Oppure lavoro in coordinate polari:

$$\rho^4(\cos^2 t - 6\cos^2 t \,\text{sen}^2 t + \text{sen}^4 t) = \rho^4\left((\cos^2 t + \text{sen}^2\theta)^2 - 8\,\text{sen}^2 t\cos^2 t\right) =$$

$$= \rho^4(1 - 2\,\text{sen}^2 2t) > 0 \iff \text{sen}^2 2t < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < \text{sen}\, 2t < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff -\frac{\pi}{8} < t < \frac{\pi}{8} \text{ oppure } \frac{3\pi}{8} < t < \frac{5\pi}{8} \text{ oppure } \frac{7\pi}{8} < t < \frac{9\pi}{8} \text{ oppure } -\frac{5\pi}{8} < t < -\frac{3\pi}{8}$$

Cambiando segno (varie volte!) in settori che passano per l'origine (ove vale 0) la funzione in 0 non può che avere punti di SELLA.



- - - - - - - - - .

Esercizio: $3x^2 + y^2 - x^3y$: determinare i punti critici e studiarli.

$$\begin{cases} f_x = 6x - 3x^2y = 3x(2-xy) = 0 \\ f_y = 2y - x^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(4-x^4) = 0 \\ y = \frac{1}{2}x^3 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0) \; = (\sqrt{2},\sqrt{2}) \; = (-\sqrt{2},-\sqrt{2})$$

$$\mathcal{H}_f = \begin{vmatrix} 6(1-xy) & -3x^2 \\ -3x^2 & 2 \end{vmatrix} = 12(1-xy) - 9x^4 = \begin{cases} x=y=0: 12;\ f_{yy}=2>0 \Rightarrow \text{MIN} \\ x=y=\sqrt{2}: -12-36<0 : \text{SELLA} \\ x=y=-\sqrt{2}: -12-36<0 : \text{SELLA.} \end{cases}$$

ESEMPIO SPINOSO

Studiare i punti critici di $f(x,y) = (y-x^2)(y-1)^2$.

1) $f_x = -2x(y-1)^2 \qquad f_y = (y-1)^2 + 2(y-1)(y-x^2)$

Quindi $\operatorname{grad} f = (0,0) \iff \begin{cases} x(y-1)^2 = 0 \\ (y-1)(3y-1-2x^2) = 0 \end{cases}$

Risolvo: il sistema è equivalente all'unione dei 2 "sistemi"

$\begin{cases} x=0 \\ 3y-1-2x^2=0 \end{cases} \cup \{ y-1=0$ (ANNULLA ENTRAMBE LE EQ.)

Quindi i punti critici sono $(0, 1/3)$ e $(x, 1)$ con x variabile comunque in $\mathbb{R}$.

$f_{xx} = -2(y-1)^2, \quad f_{xy} = f_{yx} = -4x(y-1), \quad f_{yy} = 6y-4-2x^2 \Rightarrow$

$$\mathcal{H}_f = \begin{vmatrix} -2(y-1)^2 & -4x(y-1) \\ -4x(y-1) & 6y-4-2x^2 \end{vmatrix} = 4(y-1)^2(x^2-3y+2-4x^2)$$

Allora:

$\mathcal{H}_f(0, 1/3) = 4\left(-\frac{2}{3}\right)^2(0-1+2-0) > 0 \Rightarrow \left(0, \frac{1}{3}\right)$ punto estremante

$f_{xx}(0, 1/3) = -2\left(\frac{-2}{3}\right)^2 < 0 \Rightarrow \left(0, \frac{1}{3}\right)$ Punto di Massimo locale forte

$f\left(0, \frac{1}{3}\right) = 4/27$.

Invece $\mathcal{H}_f(x, 1) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Bisogna vedere che cosa succede in un intorno dei vari punti $(x, 1)$, tenuto conto che $f(x,1) = 0$.

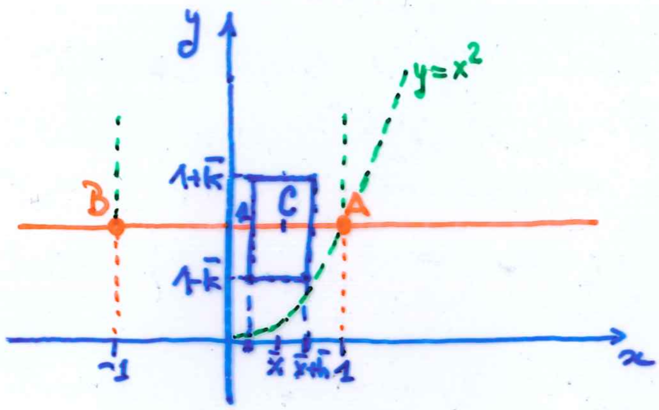
In $A=(1,1)$ si ha un punto di sella poiché muovendosi lungo una retta parallela all'asse y passante per il punto, cioè considerando $P = (1, 1+k)$ la funzione assume segno diverso a seconda che k sia >0 o <0:

$$f(1, 1+k) = k(k^2) \begin{cases} >0 & \text{per } k>0 \\ <0 & \text{per } k<0 \end{cases}$$

Quindi in un intorno di $(1,1)$, il valore di f non è sempre $\geq$ o sempre $\leq$ del valore di f in $(1,1)$

Allo stesso modo $B=(-1,1)$ è un punto di sella

poiché $f(-1,1+k) = k(k^2) \begin{cases} >0 & \text{per } k>0 \\ <0 & \text{per } k<0 \end{cases}$



Sia ora $|\bar{x}|<1$ e considero

$f(\bar{x}+h, 1+k) = (1+k-(\bar{x}+h)^2)k^2$

Posso prendere il punto "variato" $(\bar{x}+h, 1+k)$ in modo che stia nella regione $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>x^2\}$, cioè sopra la parabola di equazione $y=x^2$: fisso $\bar{h}>0$ con $|\bar{h}|<\min(|x+1|,|x-1|)$ in modo che $|\bar{x}+\bar{h}|<1$ e fisso $\bar{k}$ di conseguenza come illustrato in figura (così che ad es. il punto $(\bar{x}+\bar{h}, 1-\bar{k})$ è ancora "sopra" la parabola).

Su tutti i punti $(\bar{x}+h, 1+k)$ che variano nel rettangolo

$\mathcal{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x-\bar{x}|<\bar{h} \text{ e } |y-1|<\bar{k}\}$

il valore della funzione risulta allora >0 e quindi $> f(\bar{x},1) \Rightarrow (\bar{x},1)$ è un punto di minimo locale (non forte poiché anche gli altri punti su $y=1$ hanno lo stesso valore)

Similmente se considero $(\bar{x},1)$ con $|\bar{x}|>1$ posso individuare tutto un rettangolo $\mathcal{R}$ che contiene $(\bar{x},1)$ e sta al di sotto della parabola di equazione $y=x^2$ e quindi tale che in tutti i suoi punti si abbia

$$f(x,y) < 0 = f(\bar{x},1)$$

Ne segue che se $|\bar{x}|>1$ i punti $(\bar{x},1)$ sono dei MAX locali (non forti).

Esempi di studio di ottimizzazione di tipo teorico

1) Siano dati n punti $P_i=(x_i;y_i)$ $(i=1,\dots,n)$ nel piano. Trovare un punto $P=(x,y)$ t.c. la somma dei quadrati delle distanze di P dai P_i sia minima.

$$S(x,y)=\sum_1^n\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]$$

Punti critici:
$$\begin{cases} S_x=\sum_1^n 2(x-x_i) = 2\left(nx-\sum_1^n x_i\right)=0\\ S_y=\sum_1^n 2(y-y_i) = 2\left(ny-\sum_1^n y_i\right)=0\end{cases}$$

Il punto critico è $\left(\frac{1}{n}\sum x_i,\ \frac{1}{n}\sum y_i\right)$ ... baricentro

$S_{xx}=2n=S_{yy}$ mentre $S_{xy}=S_{yx}=0$ $\Rightarrow$ $H_S=\begin{vmatrix}2n & 0\\ 0 & 2n\end{vmatrix}>0$

$S_{xx}>0$ $\Rightarrow$ il baricentro è effettivamente il punto di minimo

2) Metodo dei minimi quadrati

Consideriamo n punti $P_i=(x_i,y_i)$ $(i=1\dots n)$: osservazioni sperimentali di 2 variabili su una certa popolazione. Se supponiamo che tra le due variabili ci sia un legame lineare (entro i limiti dell'errore sperimentale) possiamo cercare la retta $y=ax+b$ che meno si discosta dal passare per gli n punti.

Definiamo errore quadratico totale $E(a,b)=\sum_1^n(ax_i+b-y_i)^2$

Lo minimizziamo: la retta ottenuta in qs modo sarà detta retta di regressione.

$$\begin{cases}E_a=\sum 2x_i(ax_i+b-y_i)=0\\ E_b=\sum 2(ax_i+b-y_i)=0\end{cases}\qquad \begin{cases}2\sum(x_i^2a+x_ib-x_iy_i)=0\\ 2\left(a\sum x_i+nb-\sum y_i\right)=0\end{cases}$$

Chiamo: $\sum x_i^2=P$, $\sum x_i=Q$, $\sum y_i=R$, $\sum x_iy_i=S$

e riscrivo $\begin{cases}Pa+Qb=S\\ Qa+nb=R\end{cases}$ Nota: $nP-Q^2=n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2>0$ (*) $\forall n\geq 2$ se gli x_i sono distinti!

$$\Rightarrow\ \bar{a}=\frac{nS-RQ}{nP-Q^2},\quad \bar{b}=\frac{PR-SQ}{nP-Q^2}$$

Inoltre $E_{aa}=2P$, $E_{ab}=2Q=E_{ba}$, $E_{bb}=2n$ $\Rightarrow$ $\mathcal{H}=4\begin{vmatrix}P & Q\\ Q & n\end{vmatrix}>0$

e $P>0$ $\Rightarrow$ $(\bar{a},\bar{b})$ minimo $\Rightarrow$ $y=\bar{a}x+\bar{b}$ è la retta di regressione

---

(*) $n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2=\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2$