ES. 1 Determinare le soluzioni dell'eq. diff.

$$(*) \qquad y'(t) = 2t\,(1 - (y(t))^2)$$

che soddisfino le seguenti condizioni iniziali:

A) $y(0) = 2$ B) $y(0) = 1$ C) $y(0) = 1/2$

D) $y(0) = -2$ E) $y(h) = -2$ con $h \in \mathbb{R}$ F) $y(\sqrt{\ln 2}) = 7$

Sol. $y' = 2t(1-y^2)$ è una eq. diff. A VARIABILI SEPARABILI:

$a(t) = 2t$ è continua in $I = \mathbb{R}$

$b(y) = 1 - y^2$ è cont. in $J = \mathbb{R}$ e anche

$b_y(y) = -2y$ è cont. in $J = \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ per ogni condizione iniziale c'è una e una sola soluzione di $(*)$ che la realizza.

1° passo: determino l'integrale generale di $(*)$ in forma implicita.

- $b(y) = 1 - y^2 = 0$ per $y = \pm 1$ $\Rightarrow$ la $(*)$ ha due soluzioni costanti

$$\boxed{y(t) = 1} \qquad e \qquad y(t) = -1$$

La prima è la soluzione che soddisfa la condizione (B).

- Se $b(y) \neq 0$ separo le variabili:

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int 2t\,dt \qquad (**)$$

Attenzione: $\dfrac{1}{b(y)}$ è continua su ciascuno dei singoli intervalli $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$: le primitive corrispondenti sono definite sui singoli intervalli.

Calcolo:

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = -\int \frac{dy}{y^2-1} = -\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy = -\frac{1}{2} \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + c_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| + c_1 \, , \quad \text{con } c_1 \in \mathbb{R}$$

Quindi la (**) equivale a

$$\frac{1}{2} \ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| + c_1 = t^2 + c_2 \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

o - più semplicemente, posto $c = 2(c_2 - c_1)$ - :

(***) $$\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = 2t^2 + c \, , \quad c \in \mathbb{R}$$

Questo è l'integrale generale in forma implicita.

<u>2° passo</u>: passaggio a forma esplicita.

<u>Se non fossero assegnate le condizioni iniziali</u> potrei riscrivere la (***) come

$$\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = e^{2t^2+c}$$

cioè

$$\frac{y+1}{y-1} = \pm e^{2t^2+c}$$

ove il segno $\boxed{+}$ va scelto se si vogliono soluzioni con $y(t) > 1$ oppure $y(t) < -1$ e il segno $\boxed{-}$ va scelto se le si vogliono con $y(t) \in (-1,1)$.

Tenuto conto che $\pm e^{2t^2+c} = (\pm e^c) \cdot e^{2t^2}$ e che $\pm e^c$ al variare di c in $\mathbb{R}$ descrive TUTTI i numeri REALI NON NULLI, si può scrivere

$$\frac{y+1}{y-1} = k e^{2t^2} \qquad \text{con } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

cioè $y(1 - ke^{2t^2}) = -1 - ke^{2t^2} \Rightarrow y(t) = \dfrac{ke^{2t^2}+1}{ke^{2t^2}-1}$

ove $k>0$ dà le sol. con $|y(t)| > 1$ e $k<0$ dà le sol. con $|y(t)| < 1$.

Ma in realtà il problema assegna delle condizioni iniziali. Allora, CONVIENE OPERARE COSÌ

2° passo in presenza di PROBLEMA di CAUCHY

- Consideriamo il caso A): $\begin{cases} y' = 2t(1-y^2) \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Poiché $y(0) > 1$ e poiché il grafico di questa soluz. non può attraversare quello della sol. costante $y(t)=1$ (TEOR. di CAUCHY!) si deve avere $y(t) > 1$. Dunque $\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = \frac{y+1}{y-1}$.

In (***): $\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = 2t^2 + c$ sostituisco $t=0$ e $y=2$:

$$\ln\left(\frac{2+1}{2-1}\right) = 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = \ln 3$$

Quindi la sol. in forma implicita del problema di Cauchy è

$$\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = 2t^2 + \ln 3$$

cioè

$$\frac{y+1}{y-1} = e^{\ln 3} \cdot e^{2t^2}$$

$$\Rightarrow \quad y+1 = 3e^{2t^2}(y-1) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{3e^{2t^2}+1}{3e^{2t^2}-1}$$

o, se si preferisce: $y(t) = 1 + \frac{2}{3e^{2t^2}-1}$

che mette in evidenza che $y(t) > 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$, che $y(t)$ è pari, ha massimo in $t=0$ e asintoto orizzontale $y=1$.

VEDERE curva 1 nel grafico a pag Ed 5.

- Il caso (B) è già stato esaminato: non sarebbe stato possibile recuperarlo da (***) (essendo $y-1$ al denominatore).

• caso C) : $\begin{cases} y' = 2t(1-y^2) \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$

La condizione iniziale impone che $|y(t)| < 1$

e quindi $\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = \frac{y+1}{1-y}$. In (***): $\ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right) = 2t^2 + c$

sostituisco $t=0$, $y = 1/2$

$$\ln\left(\frac{1/2+1}{1-1/2}\right) = 0 + c \qquad \Rightarrow c = \ln 3$$

$\Rightarrow$ sol. in forma implicita : $\ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right) = 2t^2 + \ln 3$

$$\Rightarrow \frac{y+1}{1-y} = 3e^{2t^2} \quad \Rightarrow y+1 = 3e^{2t^2}(1-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{3e^{2t^2}-1}{3e^{2t^2}+1} = 1 - \frac{2}{3e^{2t^2}+1}$$

che evidenzia che la soluzione è definita $\forall t \in \mathbb{R}$, sempre < 1 ma $\geq 1/2$ (che risulta essere il minimo, assunto in $t=0$), pari e dotata di asintoto orizzontale $y = 1$ (VEDI curva 2 nel grafico a pag Ed5)

• caso D) : $\begin{cases} y' = 2t(1-y^2) \\ y(0) = -2 \end{cases}$

In questo caso $y(t) < -1$.

Sostituendo $t=0$ e $y=-2$ in (***): $\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = 2t^2 + c$:

$$\ln\left(\frac{-2+1}{-2-1}\right) = 0 + c \qquad \Rightarrow c = -\ln 3$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = 2t^2 - \ln 3 \Rightarrow \frac{y+1}{y-1} = \frac{1}{3}e^{2t^2}$$

$$\Rightarrow 3(y+1) = (y-1)e^{2t^2} \Rightarrow y(t) = \frac{e^{2t^2}+3}{e^{2t^2}-3} \Rightarrow$$

$y(t) = 1 + \frac{6}{e^{2t^2}-3}$: <u>attenzione</u> il dominio di questa soluzione deve contenere $t=0$

Dovendo essere $e^{2t^2} - 3 \neq 0$, cioè $t^2 \neq \frac{1}{2}\ln 3$, il dominio della soluzione è $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}\ln 3}, \sqrt{\frac{1}{2}\ln 3}\right)$

• caso E) : $\begin{cases} y' = 2t(1-y^2) \\ y(h) = -2 \end{cases}$ con $h \in \mathbb{R}$

Anche in questo caso $y(t) < -1$
Sostituendo $t = h$ e $y = -2$ in $\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = 2t^2 + c$:

$$-\ln 3 = 2h^2 + c \Rightarrow c = -\ln 3 - 2h^2$$

$$\Rightarrow \frac{y+1}{y-1} = \frac{1}{3} e^{2(t^2-h^2)} \Rightarrow \dots \; y(t) = 1 + \frac{6}{e^{2(t^2-h^2)} - 3}$$

Anche quì: $e^{2(t^2-h^2)} \neq 3 \Rightarrow t^2 \neq h^2 + \frac{1}{2}\ln 3$
$\Rightarrow$ dominio contenente $t = h$ è l'intervallo simmetrico rispetto all'origine $\left(-\sqrt{h^2 + \frac{1}{2}\ln 3}, \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}\ln 3}\right)$

• caso F) : $\begin{cases} y' = 2t(1-y^2) \\ y(\sqrt{\ln 2}) = 7 \end{cases}$

In questo caso si avrà $y(t) > 1$ là dove è definito
Sostituendo $t = \sqrt{\ln 2}$ e $y = 7$ in $\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = 2t^2 + c$:

$$\ln \frac{8}{6} = 2\ln 2 + c \Rightarrow c = -\ln 3$$

$$\dots \Rightarrow y(t) = 1 + \frac{6}{e^{2t^2} - 3}$$

La legge è identica a quella del caso (D) ma in questo caso, visto che $\sqrt{\ln 2} > \sqrt{\frac{1}{2}\ln 3}$ (★) il dominio della soluzione è $\left(\sqrt{\frac{1}{2}\ln 3}, +\infty\right)$

(★) Infatti
$4 > 3$
$\Downarrow$
$\ln 4 > \ln 3$
$\Downarrow$
$\ln 2 > \frac{1}{2}\ln 3$
$\Downarrow$
$\sqrt{\ln 2} > \sqrt{\frac{1}{2}\ln 3}$

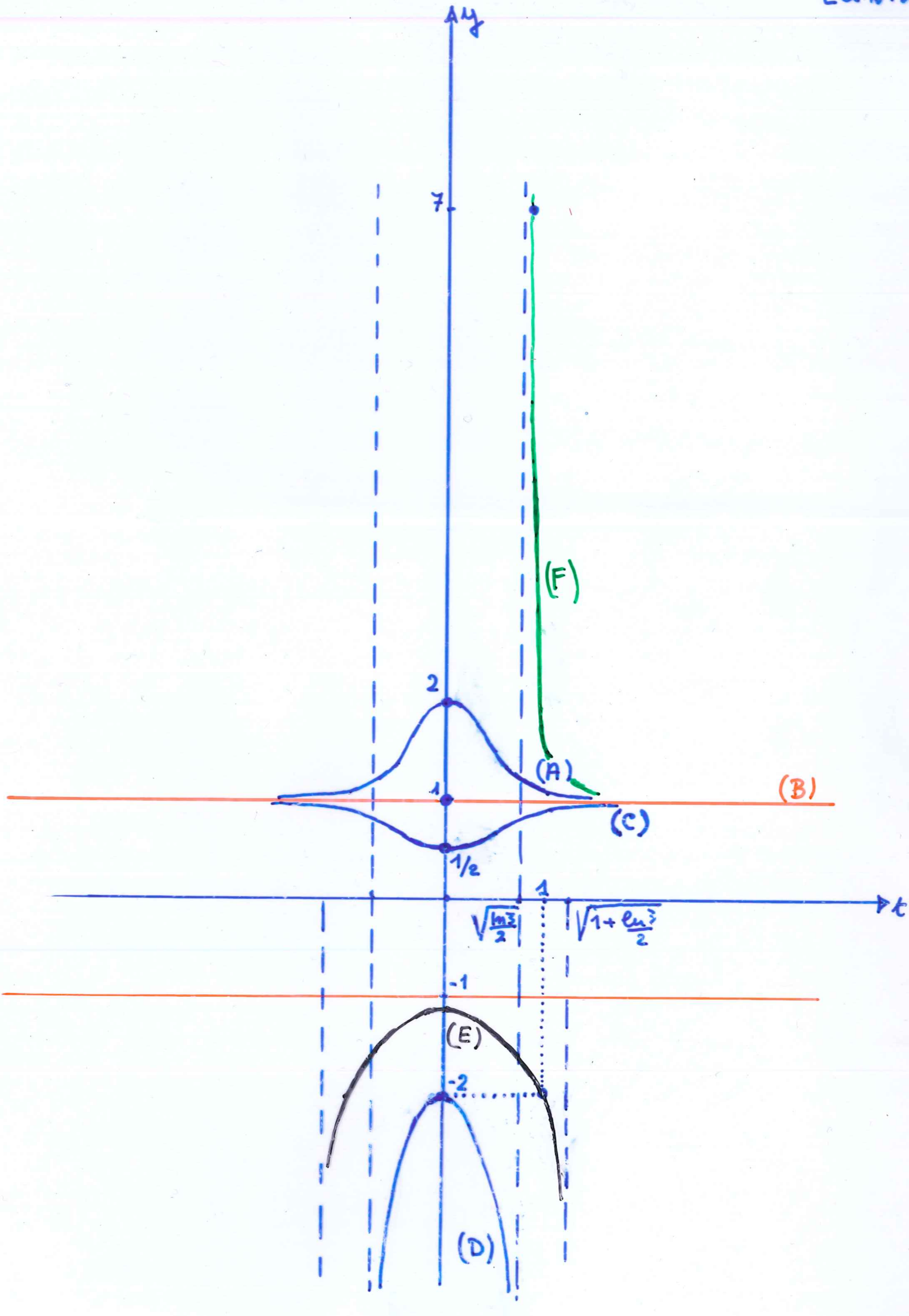
Cioè per rappresentare correttamente la soluzione bisogna fornire LEGGE + DOMINIO. Qui la sol. è

$$y(t) = 1 + \frac{6}{e^{2t^2} - 3}, \quad t \in \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}\ln 3}, +\infty\right)$$

nel caso (D) è

$$y(t) = 1 + \frac{6}{e^{2t^2} - 3}, \quad t \in \left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}\ln 3}, \sqrt{\tfrac{1}{2}\ln 3}\right)$$

Ed 6.5



Es 2 EQUAZIONE LOGISTICA: $y' = ay(1-by)$ con a, b costanti >0

In questo caso $a(t) = a$ $\quad b(y) = y(1-by)$

$\Rightarrow$ soluzioni costanti : $y = 0 \quad y = \frac{1}{b}$

Ponendosi in uno degli intervalli $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, 1/b)$ $J_2 = (1/b, +\infty)$ si passa a

$$\int \frac{dy}{y(1-by)} = \int a\, dt$$

RICORDARE: $\frac{1}{y(1-by)} = \frac{1}{y} + \frac{b}{1-by}$

$$\Downarrow$$

$$\ln \left| \frac{y}{1-by} \right| = at + c \iff \left| \frac{y}{1-by} \right| = e^{at+c} \iff$$

$$\frac{y}{1-by} = \pm e^c \cdot e^{at}$$

e ponendo $k = \pm e^c$, cioè k costante arbitraria non nulla:

$$\frac{y}{1-by} = k e^{at}$$

, cioè risolvendo rispetto a y

$$y(t) = \frac{k e^{at}}{1 + bk e^{at}}.$$

NOTA: visto che $b(y)$ è un polinomio (e quindi derivabile con derivata prima continua), il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ay(1-by) \\ y'(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è risolubile.

cioè, per ogni punto (t_0, y_0) di $\mathbb{R}^2$ passa una e una sola CURVA INTEGRALE (grafico di una soluzione particolare).

Studiamo le curve integrali di un'equazione logistica particolare (per vedere come vanno)

$a = 1, \; b = \frac{1}{2}$

sol. costanti: $y=0, y=2$

$y' = y\left(1-\frac{1}{2}y\right)$ $\Rightarrow$ integrale generale $y = \dfrac{2k}{2e^{-t}+k}$

$y'' = y' - \frac{1}{2}\cdot 2yy' = \frac{1}{2}\,y(1-y)(2-y)$

Se $k>0$ (cioè se $\underbrace{\dfrac{y}{1-\frac{1}{2}y}}_{=ke^t} > 0$ e quindi $0<y<2$)

a) $y(t)$ è definita derivabile e positiva per ogni $t\in\mathbb{R}$.

b) $y'(t) = \frac{1}{2}\,y(t)\left(2-y(t)\right)$ è positiva $\forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow y(t)$ cresce

e $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 2$

c) $y''(t) = \frac{1}{2}\,y(t)\left(1-y(t)\right)\left(2-y(t)\right) > 0$ se $0<y(t)<1$
< 0 se $1<y(t)<2$

$\Rightarrow$ se $y(t) = \dfrac{2k}{2e^{-t}+k} = 1$ cioè se $t = \ln\frac{2}{k}$ c'è un flesso
e in esso la tangente ha coefficiente angolare
$y'(\ln 2/k) = 1\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ INDIPENDENTE DA k

d) individuo una sol. particolare ponendo ad es. $y(0)=y_0$ con $0<y_0<2$

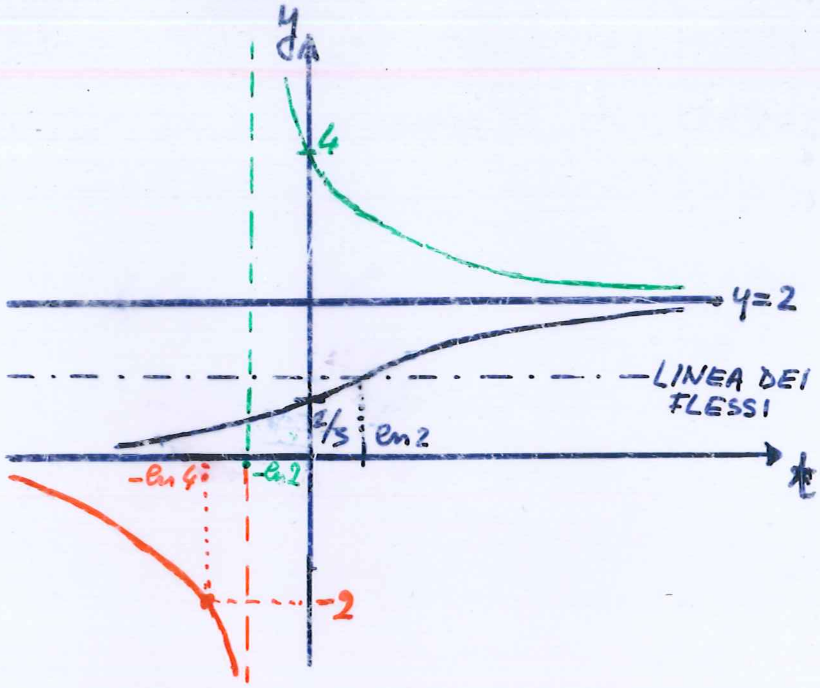
Invece se $k<0$, cioè $y(t)<0$ oppure $y(t)>2$

a) • $y(t)$ è definita derivabile e positiva $\Leftrightarrow$ $2e^{-t}+k<0$ cioè per $t>\ln\left(\frac{-2}{k}\right)$
• $y(t)$ " " e negativa $\Leftrightarrow t<\ln(-2/k)$
LIMITI COME SOPRA

b) $y'(t)<0$ su ciascuno dei due intervalli $(-\infty, \ln(-2/k))$
$(\ln(-2/k), +\infty)$

c) $y''(t)>0$ se $y(t)>2$ cioè per $t>\ln\left(\frac{-2}{k}\right)$: $y(t)$ convessa
<0 se $y(t)<0$ cioè per $t<\ln\left(\frac{-2}{k}\right)$: $y(t)$ concava

DA NOTARE CHE anche se il valore di k che compare è lo stesso, le soluzioni particolari definite sui due intervalli $\left(-\infty, \ln\left(\frac{-2}{k}\right)\right)$ e $\left(\ln\left(\frac{-2}{k}\right), +\infty\right)$ allorché $k<0$ SONO DUE DIVERSE: esse corrispondono ad aver scelto 2 diverse "condizioni iniziali": $y(t_1)=y_1$ con $y_1<0$
oppure : $y(t_2)=y_2$ con $y_2>0$



$y(0) = 2/3 \Rightarrow$

$2k = \frac{2}{3}(k+2) \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 1 \Rightarrow$

flesso: $(\ln 2, 1)$

$y(0) = 4 \Rightarrow$

$2k = 4(k+2) \Rightarrow k = -4$

$\Rightarrow$ definita in $(-\ln 2, +\infty)$

$y(-\ln 4) = -2 \Rightarrow 2k = -2(2e^{\ln 4} + k) \Rightarrow -k = e^{\ln 4} = 4 \; : \; k = -4$

Ma questa soluzione è definita (e derivabile) in $(-\infty, -\ln 2)$

In sostanza: per ogni punto dei due semipiani $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 2\}$ e $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$ passa una soluzione particolare, che però NON È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$, ma solo su una semiretta.

Invece le soluzioni che passano per un punto della fascia $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2\}$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Un esempio di equazione logistica è dovuta a Verhulst (1845) e fornisce un modello per la dinamica delle popolazioni:

$$N'(t) = \varepsilon \, N(t) \left(1 - \frac{1}{C} N(t)\right)$$

ove $N(t)$ = numero di individui al tempo t di una popolazione isolata

$\varepsilon = \lambda - \mu$: potenziale biologico

λ : tasso di fertilità (= numero di nuovi nati per individuo nell'unità di tempo)

μ : tasso di mortalità (= numero di morti per individuo nell'unità di tempo)

C = capacità dell'ambiente.

Imponendo la condizione iniziale $N(0) = N_0 > 0$ si determina l'andamento della popolazione. Soluzioni di EQUILIBRIO: $N(t) = 0$, $N(t) = C$