EQUAZIONI DIFFERENZIALI

In **cinematica** si affronta il problema: dato un corpo - che a un certo istante iniziale t_0 ha una certa posizione e una certa velocità - sottoposto ad una certa accelerazione, qual è l'equazione del moto?

Es.: $a = 0$ $\Rightarrow$ moto rettilineo uniforme

$a = \text{cost.} \neq 0$ $\Rightarrow$ moto rettilineo uniformemente accelerato

$a = -k^2 s$ $\Rightarrow$ moto armonico.

Visto che l'accelerazione è la derivata seconda $\ddot{s}$ dello spostamento s, tutte le equazioni scritte coinvolgono la funzione s e le sue derivate (e - anche se in maniera meno palese - il tempo) e sono perciò **esempi di equazioni differenziali.**

In generale si parla di EQUAZIONE DIFFERENZIALE ogni volta che si ha un'equazione che lega:

- la <u>variabile indipendente</u> t
- un certo numero di sue <u>funzioni</u> (eventualmente costanti) <u>NOTE</u>
- UNA FUNZIONE $y(t)$ e un certo numero di sue DERIVATE da considerare come <u>incognite</u>.

Posso esprimere questo simbolicamente dicendo che l'eq. ha la forma

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

ove F è una funzione di $n+2$ variabili.

L'<u>ordine</u> dell'equazione differenziale è il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione ($: n$).

Negli esempi: eq diff. di 2° ordine.

Risolvere un' eq. differenziale significa trovare una funzione $y(t)$ tale che, sostituendo lei e le sue derivate nell' equazione, si trovi un' identità.

In generale l'equazione differenziale da sola non individua univocamente "la soluzione" del problema: questo è il motivo per cui, quando cerco l'equazione del moto di un ben preciso corpo, non mi accontento di dire ades.:

è sottoposto ad accelerazione nulla

ma do anche le <u>condizioni iniziali</u> relative alla posizione e alla velocità. Anche supponendo di prendere sempre come posizione iniziale

$$s_0 = 0$$

è ben diverso supporre che il corpo abbia una velocità iniziale $v_0 = 1$ m/s piuttosto che $v_0 = -1$ m/s o $v_0 = 0$ m/s !

La famiglia di funzioni che (prescindendo dalle condizioni iniziali) sono soluzione di una certa equazione differenziale prende il nome di

<u>integrale generale dell'eq. diff.</u>

Il problema di stabilire quale delle funzioni di tale famiglia (= <u>soluzione particolare</u>) soddisfa determinate condizioni iniziali prende il nome di PROBLEMA di CAUCHY.

Come sempre quando si parla di equazioni, ci sono due aspetti del problema: la risolubilità e il calcolo effettivo delle soluzioni.

OSS. Perché chiamare integrale generale l'insieme di tutte le funzioni sol. dell'eq. diff.?
Perchè il problema di risolvere eq. diff. è una generalizzazione di un'altro ben noto problema:

$y'(t) = f(t)$ è un'equazione differenziale; risolverla significa trovare tutte le primitive di $f(t)$, cioè calcolare $\int f(t)\,dt$.

E' ben noto che se $f(t)$ è continua le primitive esistono, sono infinite e che se $F(t)$ è una di esse tutte le altre hanno la forma

$$F(t)+c \qquad c \in \mathbb{R}$$

In questo caso posso individuare univocamente la funzione "soluzione particolare" dando la condizione iniziale

$$y(t_0) = y_0 .$$

Trovo infatti $F(t_0) + c = y_0 \Rightarrow c = y_0 - F(t_0)$
Quindi in questo caso il problema di Cauchy è risolto dalla funzione $y(t) = F(t) - F(t_0) + y_0$

Equazione di questo tipo è $\ddot{s} = a$, pensata come equazione differenziale in $\dot{s}$:
$\dot{s} = at + c$ è l'integrale generale e se pongo
$\dot{s}(0) = v$ trovo $c = v \Rightarrow$ soluzione particolare:
$\dot{s} = at + v$.

A sua volta questa può essere pensata come equazione diff. (dello stesso tipo visto sopra) in s:
$s = \frac{1}{2}at^2 + vt + c$ integrale generale e se $s(0) = 0 \Rightarrow$ soluz. particolare $s = 1/2\, at^2 + vt$.

EQ. DIFF. del 1° ordine

Hanno la forma: $F(t, y(t), y'(t)) = 0$

Ogni funzione $\varphi(t)$ derivabile in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e tale che $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$ è una soluzione.

Delle equazioni del 1° ordine quelle che si studiano meglio sono le cosiddette eq. diff. del 1° ordine in FORMA NORMALE:

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Per esse vale il seguente teorema (che garantisce la risolubilità del problema di Cauchy):

TEOR. Se $f(t, y)$ e $f_y(t, y)$ sono entrambe continue allorché t varia in $I := [t_0 - a, t_0 + a]$ e y varia in $\mathbb{R}$, allora <u>esiste</u> un'<u>unica</u> funzione $y(t)$, definita in un intorno di t_0 e ivi continua e derivabile soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ATTENZIONE: non è comunque detto che l'integrale sia ricavabile in forma esplicita: in caso negativo si ricorre a metodi di "integrazione approssimata" (Eulero, Runge-Kutta, ...).

Noi ci occuperemo di due situazioni in cui l'integrale si ricava in forma analitica e talora esplicita:

- equazioni differenziali a variabili separabili
- equazioni differenz. lineari del 1° ordine.

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Siano $a(t)$ e $b(y)$ due funzioni continue rispettivamente su due intervalli I e J di $\mathbb{R}$. Un'eq. diff. del tipo

$$y'(t) = a(t)\, b(y)$$

è detta <u>a variabili separabili</u>

Se $\bar{y}$ è uno zero di $b(y)$, cioè $b(\bar{y})=0$, la funzione

$$\varphi(t) = \bar{y}$$

è una soluzione perché $\varphi'(t)=0$ e quindi $\varphi'(t)=a(t)\,b(\varphi(t))$

In ogni intervallo $J' \subseteq J$ in cui $b(y) \neq 0$ l'eq. diff. si riscrive come $\frac{y'(t)}{b(y)} \cdot dt = a(t)\,dt$ cioè:

$$\frac{dy}{b(y)} = a(t)\,dt \qquad \left(y'(t) = \frac{dy}{dt} \right)$$

Così abbiamo separato le due variabili y e t.

Allora l'integrale generale - in forma implicita - è dato da

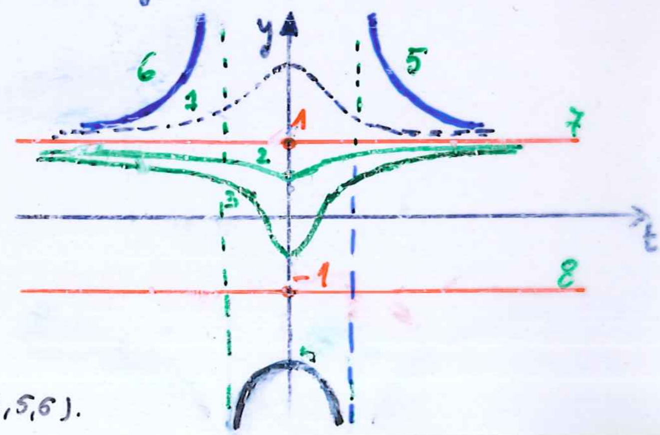
$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t)\,dt + c$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(a(t) \cdot b(y)\right) = a(t)\, b'(y)}$$

Perché il problema di Cauchy abbia una e una sola soluzione definita in un intorno di t_0 basterà che $b(y)$ sia derivabile con derivata prima continua in un intorno di $y_0 = y(t_0)$.

Nei nostri esempi funzionerà.

Bisognerà però stare attenti a scegliere l'espressione corretta dell'integrale generale in dipendenza da y_0 e l'intervallo che si pensa come dominio in dipendenza da t_0.



IN FIGURA sono sommariamente rappresentati 8 integrali particolari dell'eq. diff. del successivo ES.1. Ma a seconda della scelta di y_0 ($\geq$ oppure < -1) e del corrispettivo valore t_0 si devono seguire curve diverse. Possono cambiare i domini (vedi 4,5,6).

Su una reazione chimica tra due reagenti A e B si produce una certa sostanza X.

Chiamiamo: $x(t)$ la concentrazione di X all'istante t;

a la concentrazione di A all'ist. $t=0$

b " " " B " " $t=0$

Sotto opportune ipotesi, si sa che la variazione istantanea della concentrazione di X è proporzionale al prodotto

$$k\,(a-x(t))\,(b-x(t)) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ove k è una costante positiva che dipende dai reagenti.

Come posso ricavare $x(t)$?

$$x'(t) = k(a-x(t))(b-x(t))$$

Ed 9.2

$$y'(t) = \frac{1}{2}\left(1 - y(t)\right)\left(2 - y(t)\right)$$

è un' eq. a variab. separabili?

È un eq. diff. del 1° ordine.

$b(y) = (1-y)(2-y)$
$a(t) = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ è a variab. separabili

Dove sono continue $a(t)$, $b(y)$, $b'(y)$? ciascuna su $\mathbb{R}$ e pensando alla funz. $f(t,y) = a(t)b(y)$ e a $f_y(t,y)$: continue su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

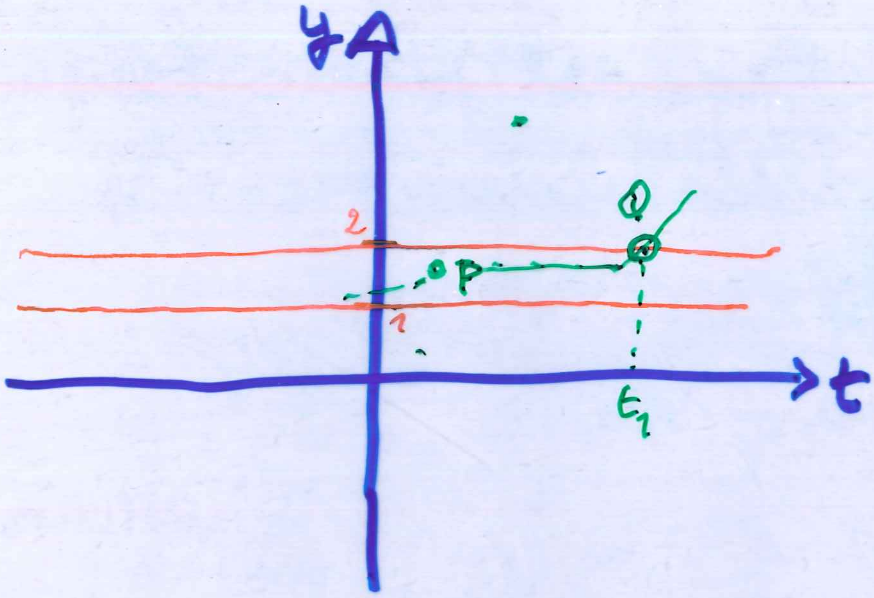
ESISTENZA

$\Rightarrow$ esiste 1 e 1 sola soluzione di un problema del tipo

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{2}\left(1-y(t)\right)\left(2-y(t)\right) \\ y(t_0) = y_0 \qquad \forall (t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \end{cases}$$

Cerco le soluzioni:

1) Sol. costanti: $y(t) = 1$, $y(t) = 2$



Nota: per $Q=(t_1,2)$ può passare 1 e 1 sola soluzione: $y(t)=2$. Quindi una sol. passante per $P=(t_0,y_0)$, con $y_0\in(1,2)$, non può passare per un punto di tipo Q $\Rightarrow$ soluzioni che soddisfino $y(t_0)=y_0$ con $y_0\in(1,2)$ hanno il grafico contenuto nella fascia $\mathbb{R}\times(1,2)$. Analog. se $y_0>2$ o $y_0<1$.

2) Ricerca delle altre soluzioni:

$$y' = \frac{1}{2}(1-y)(2-y)$$

$$\int \frac{y'\,dt}{(y-1)(y-2)} = \int \frac{1}{2}\,dt$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)(y-2)} = \frac{1}{2}t + c$$

$$\frac{1}{(y-1)(y-2)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-2}$$

$$= \frac{(A+B)y + (-2A-B)}{(y-1)(y-2)}$$

$$(A+B)y - (B+2A) \equiv 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B+2A=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ A=-1 \end{cases} \quad B=1$$

$$\int\left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y-1}\right)dy = \frac{1}{2}t+c$$

$\Updownarrow$

$$\ln|y-2| - \ln|y-1| = \frac{1}{2}t+c$$

$\Updownarrow$

$$\ln\frac{|y-2|}{|y-1|} = \frac{1}{2}t+c$$

Integrale generale in forma implicita.

3°) Calcolo delle soluzioni di 2 problemi di Cauchy differenti:

I $y(0)=3/2 \in (1,2)$ II $y(0)=3 \in (2,+\infty)$

I $$\begin{cases} \ln\left|\dfrac{y-2}{y-1}\right| = \dfrac{1}{2}t+c \\ y(0)=3/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cdots\cdots \\ \ln\left|\dfrac{3/2-2}{3/2-1}\right| = \dfrac{1}{2}\cdot 0+c \end{cases} \Rightarrow 0=c$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{2-y}{y-1}\right) = \frac{1}{2}t+0$$

sol. in forma implicita del probl. di Cauchy

Ed. 9.5

$$\frac{2-y}{y-1} = e^{\frac{1}{2}t}$$

$$2-y = e^{\frac{1}{2}t}(y-1)$$

$$y\left(e^{\frac{1}{2}t}+1\right) = 2+e^{\frac{1}{2}t}$$

$$y(t) = \frac{2+e^{1/2t}}{1+e^{1/2t}}$$ è definita $\forall t \in \mathbb{R}$

II
$$\begin{cases} \ln\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = \frac{1}{2}t + c \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ \ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot 0 + c \end{cases} \Rightarrow c = \ln\frac{1}{2}$$

$y > 2$ e quindi:

$$\ln\left(\frac{y-2}{y-1}\right) = \frac{1}{2}t + \ln\frac{1}{2}$$

$$\frac{y-2}{y-1} = e^{\left(\frac{1}{2}t + \ln\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{y-2}{y-1} = e^{\frac{1}{2}t}\cdot e^{\ln\frac{1}{2}}$$

$$\frac{y-2}{y-1} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}$$

E19.6

$$y-2 = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t}(y-1)$$

$$y\left(1-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}\right) = 2-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{2-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}}{1-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}}$$: questa legge non è def. in $1=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}$

cioè in $e^{\frac{1}{2}t}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}t = \ln 2$

$\Leftrightarrow t = 2\ln 2$

Dove è definita la soluz. del probl. di Cauchy

$$\begin{cases} \cdots \\ y(0)=3 \end{cases} ?$$

Deve essere un intervallo (soluz. derivabile $\Rightarrow$ continua $\Rightarrow$ I.D. non può essere unione disgiunta)

Devo scegliere l'intervallo su cui è definita la legge che contiene $t=0$: $0 \in (-\infty, 2\ln 2)$ e quindi la soluz. è la funzione con dominio $(-\infty, 2\ln 2)$ e di legge

$$y(t) = \frac{4-e^{\frac{1}{2}t}}{2-e^{\frac{1}{2}t}}$$

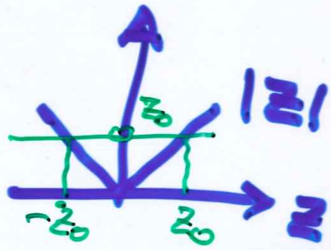
Ed 9.7

4°) Calcolo dell'integrale generale in forma esplicita:

$$\ln\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = \frac{1}{2} t + c$$

$$\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = e^{\left(\frac{1}{2} t + c\right)}$$

$$\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = e^{c} \cdot e^{\frac{1}{2} t}$$



$$\frac{y-2}{y-1} = \pm e^{c} \cdot e^{\frac{1}{2} t}$$

$\pm e^{c}$ al variare di c descrive tutti i numeri reali tranne lo zero

ma $\frac{y-2}{y-1} = 0 \cdot e^{\frac{1}{2} t} \iff \frac{y-2}{y-1} = 0 \iff$

$\iff y = 2$ è una delle 2 soluz. part.

Sostituisco $\{\pm e^{c}, 0\}$ con un parametro $k \in \mathbb{R}$ QUALSIASI.

Ed 9.8

$$\frac{y-2}{y-1} = K e^{\frac{1}{2}t} \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$y-2 = K e^{\frac{1}{2}t} (y-1)$$

$$y(1 - K e^{\frac{1}{2}t}) = 2 - K e^{\frac{1}{2}t}$$

$$y(t) = \frac{2 - K e^{\frac{1}{2}t}}{1 - K e^{\frac{1}{2}t}}$$