1

$$\begin{cases} y'(t) = \overset{\text{funz di } t}{k} \underbrace{(a - y(t))(b - y(t))}_{\text{funz. di } y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$k, a, b > 0$

$(t > 0)$

2 Casi: $a = b$; $a \neq b$

$\boxed{\text{Caso 1°}}$

$$y'(t) = k\,(a-y)^2 \qquad (*)$$

- esiste una sol. particolare della forma $y(t) = a$.
- separo le variabili

$$\frac{y'(t)}{(a-y)^2} = k \implies \int \frac{y'\,dt}{(a-y)^2} = \int k\,dt$$

$$\implies \int \frac{dy}{(a-y)^2} = \int k\,dt$$

$$(**) \quad \frac{1}{a-y} = kt + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

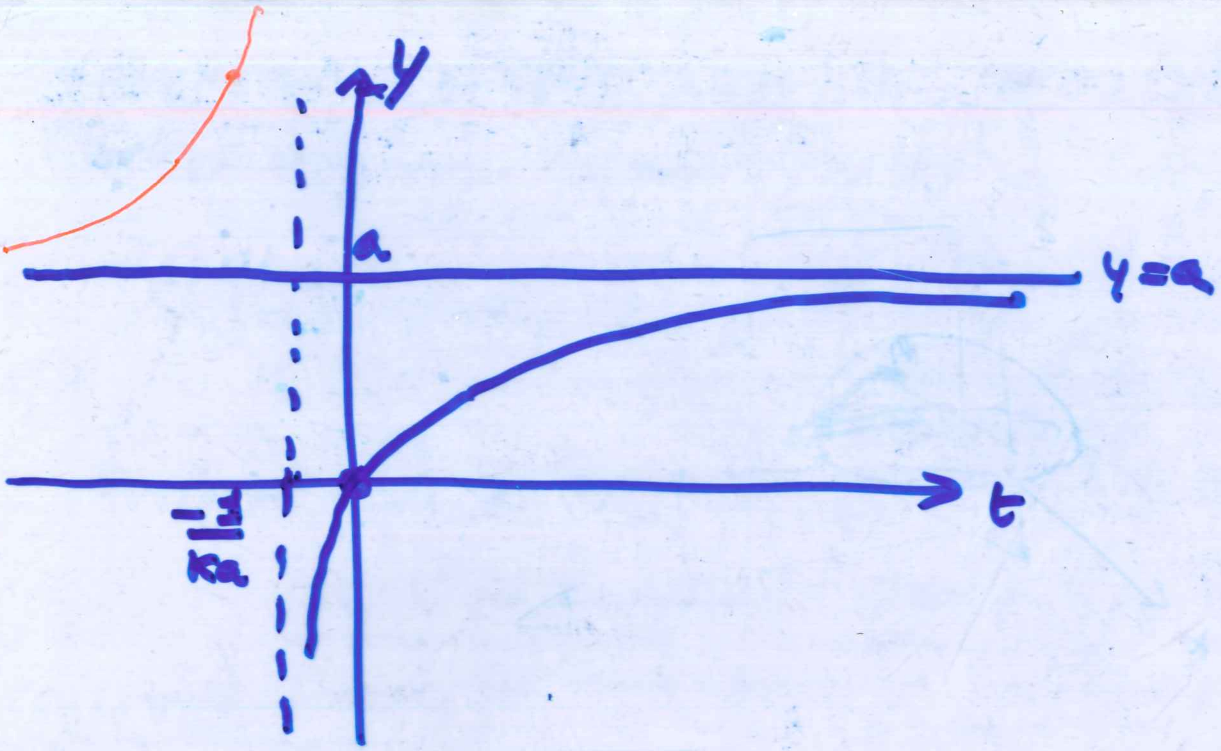
$$\implies a - y = \frac{1}{kt+c} \implies y = a - \frac{1}{kt+c}$$

INTEGRALE GENERALE di $(*)$

se $y(0)=0$ sostituendo in $(**)$

$\frac{1}{a} = 0 + c$

$$\implies y(t) = a - \frac{a}{kat+1}$$



La sol. $y = a - \dfrac{a}{kat+1}$

non è definita in $t = -\dfrac{1}{ka}$

$\Rightarrow$ il suo dominio, dovendo contenere $t=0$ è l'intervallo $\left(-\dfrac{1}{ka}, +\infty\right)$

Di tale dominio a noi interessa solo l'intervallo

$$[0, +\infty)$$

La funz soluzione è crescente, come potevo ipotizzare già guardando l'eq diff:

$$y' = k(a-y)^2$$

$$\Rightarrow y' > 0$$

2° caso

$$\begin{cases} y' = k(a-y)(b-y) \\ y(0)=0 \end{cases}$$

$k>0$

$0<a<b$ per il problema $t>0$

- ci sono 2 sol. costanti $y(t)=a$, $y(t)=b$
- separo le variabili

$$\int \frac{dy}{(a-y)(b-y)} = \int k\,dt$$

$$\frac{1}{(a-y)(b-y)} = \frac{A}{a-y} + \frac{B}{b-y} = \frac{aB+bA-(A+B)y}{(a-y)(b-y)}$$

$$\begin{cases} A=-B \\ aB+bA=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ (a-b)B=1 \end{cases} \qquad A=\frac{1}{b-a} \quad B=\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{1}{b-a}\int\left(\frac{1}{a-y}-\frac{1}{b-y}\right)dy = kt+c_1$$

$$\int\left(\frac{1}{a-y}-\frac{1}{b-y}\right)dy = (b-a)kt+C$$

$$-\ln|a-y| + \ln|b-y| = (b-a)kt+C$$

$$\ln\left|\frac{b-y}{a-y}\right| = (b-a)kt+C$$

poiché $y(0)=0$: $\ln\frac{b}{a} = (b-a)k\cdot 0 + C$

Quindi la sol in forma implicita del probl di Cauchy è

$$\ln\left(\frac{b-y}{a-y}\right) = (b-a)kt + \ln\frac{b}{a}$$

$e^{(\,)}$ ↓

$$\frac{b-y}{a-y} = e^{\ln\frac{b}{a} + (b-a)kt} = e^{\ln\frac{b}{a}} \cdot e^{(b-a)kt}$$

$$\frac{b-y}{a-y} = \frac{b}{a}\, e^{(b-a)kt}$$

$$a(b-y) = b\,(a-y)\,e^{(b-a)kt}$$

$$\left(b\,e^{(b-a)kt} - a\right) y = ba\,e^{(b-a)kt} - ba$$

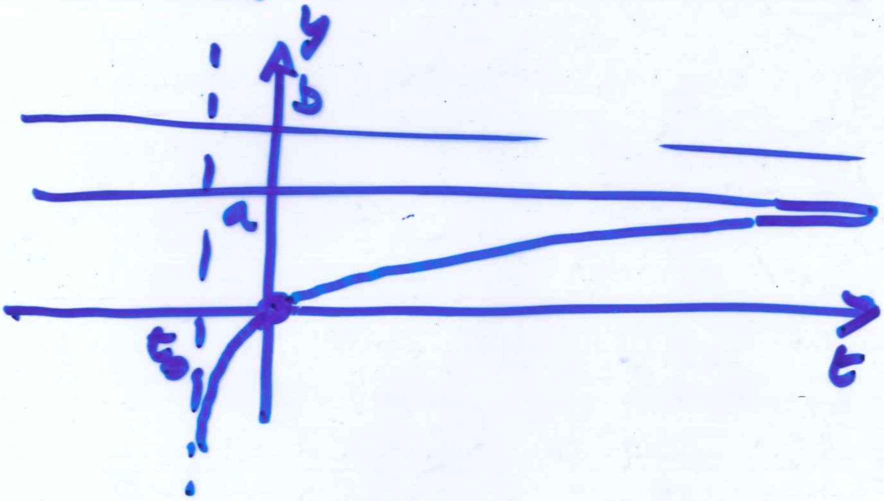
$$y = ab\,\frac{e^{(b-a)kt} - 1}{b e^{(b-a)kt} - a}$$

o anche, moltiplicando NUM e DEN per $e^{(a-b)kt}$

$$y = ab\,\frac{e^{(a-b)kt} - 1}{a\,e^{(a-b)kt} - b}$$

cioè la sol è simmetrica in a e b

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = ab\cdot\frac{1}{b} = a$$



$y' = k\underbrace{(a-y)(b-y)}_{>0}$

se $y(0)=0$

$\Rightarrow y'>0$

la soluz. cresce

la legge $\dfrac{e^{(b-a)kt}-1}{b\,e^{(b-a)kt}-a}$ non è def

in $e^{(b-a)kt} = \dfrac{a}{b}$ cioè

$$(b-a)kt = \ln\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{1}{k(b-a)}\ln\frac{a}{b} < 0 \text{ poiché } a<b \text{ e } k>0$$

Visto che $t=0$ punto in cui $y(t)$ deve essere definita sta in $(t_0,+\infty)$, questo è il dominio delle sol del probl. di Cauchy. La sol. del problema concreto ha dominio $[0,+\infty)$.

Risolvere il probl. di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + 2ty^2 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Riconosco l'eq. diff.

$y' = -2t \cdot y^2$

è ~~a~~ del I ordine, a variabili separabili con

$a(t) = +2t \quad b(y) = -y^2$

Osservazioni sulle due funzioni $a(t), b(y)$:
$a(t)$ e $b(y)$ sono due polinomi $\Rightarrow$ sono continue su $\mathbb{R}$ e $b_y(y)$ è cont. su $\mathbb{R}$ in quanto è un polin.

$\Rightarrow$ per ogni $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esiste 1 e 1 sola soluz del probl d'Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2ty^2 = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

---

1) Sol cost. $b(y) = -y^2 \Rightarrow y(t) = 0$

2) Separaz. delle variabili

$$y' = -2t\,y^2$$

$$\int \frac{-dy}{y^2} = \int +2t\,dt$$

$$\frac{1}{y} = t^2 + c$$ INTEGR. GENERALE ~~sol~~. in forma implicita

Sol. del probl. di Cauchy:

$$\frac{1}{-1} = 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

La sol in forma implicita è

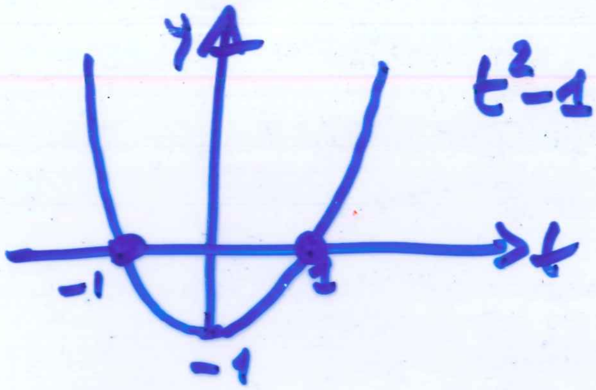
$$\frac{1}{y} = t^2 - 1$$

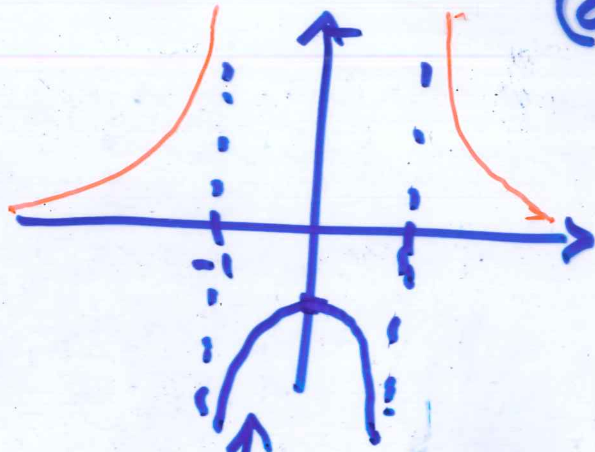
in forma esplicita

$$y(t) = \frac{1}{t^2-1}$$ legge definita per $t \neq \pm 1$

Dominio? $y(t)$ deve essere def. per $t = 0 \in (-1, 1)$ $\Rightarrow$ il dominio della sol. è $(-1, 1)$

e l'immagine è $(-\infty, -1]$





questo è il grafico della soluzione del precedente problema di Cauchy

Compiti a casa:

Risolvere (con attenzione ai domini):

- $e^{t+y}\, y' + t = 0$

- $y' + ty - t = 0$

- $\begin{cases} y' = \frac{1}{2}(1+y)(2-y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Trovare l'integrale generale di $y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|}$

Sol.

L'equazione differenziale è del 1° ordine, a variabili separabili: $a(t) = 1$, $b(y) = 2\sqrt{|y|}$. Ammette la soluzione costante $y(t)=0$. Inoltre se $y \neq 0$, $y' > 0$: quindi le soluzioni, sugli intervalli su cui sono definite devono essere CRESCENTI. Osserviamo anche che $b(y)$ è continua $\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ogni problema di Cauchy ammette 1 e 1 sola soluzione.

Risolviamo separando le variabili

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{|y|}} = \int dt \Rightarrow \begin{cases} \text{se } y>0: \sqrt{y} = t+c \\ \text{se } y<0: -\sqrt{-y} = t+c, \text{ cioè } \sqrt{-y} = -(t+c) \end{cases}$$

Se $y > 0$ la soluzione è $\begin{cases} y(t) = (t+c)^2 \\ t > -c \end{cases}$

Se $y<0$ la soluzione è $\begin{cases} -y(t) = (t+c)^2 \\ t < -c \end{cases}$ cioè $\begin{cases} y(t) = -(t+c)^2 \\ t < -c \end{cases}$

Questo significa che se la condizione di Cauchy chiede che nel punto iniziale la funzione sia >0 si sceglierà la prima funzione (notare che la disequazione fornisce il dominio della soluzione). Altrimenti la seconda.

Ad es. se si chiede $\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \\ y(0) = 3 \end{cases}$ si deve avere $\begin{cases} \sqrt{y} = t+c \\ y(0)=3 \end{cases}$

per cui si sceglierà $\sqrt{y(0)} = 0 + c \Rightarrow c = \sqrt{3}$ e soluzione $\begin{cases} y(t) = (t+\sqrt{3})^2 \\ t > -\sqrt{3} \end{cases}$

Se invece si chiede $\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \\ y(0) = -1 \end{cases}$ si sceglierà

$-\sqrt{-y(0)} = 0 + c \Rightarrow c = -1$ e soluzione $\begin{cases} y(t) = -(t-1)^2 \\ t < 1 \end{cases}$

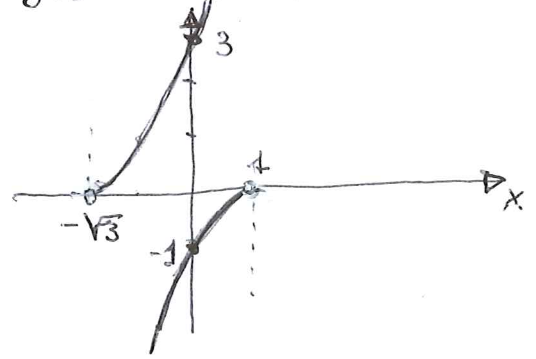


Figura che rappresenta le due soluzioni particolari.