EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL 1° ORDINE

L'eq. di Verhulst è un aggiustamento della più celebre (anche se meno adeguata) equazione di MALTHUS (1798):

(*) $$N'(t) = \varepsilon N(t)$$

che si ottiene osservando che (se trascuro la capacità dell'ambiente) la funzione $(\lambda-\mu)N(t)$ esprime l'incremento - o la diminuzione - di popolazione nell'unità di tempo, cioè

$$(\lambda-\mu)N(t) = \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$$

e facendo tendere a 0 il Δt.

Un'eq. come la (*) viene detta eq. diff. LINEARE del 1° ordine OMOGENEA.

In generale parlo di <u>eq. diff. LINEARE del 1° ordine</u> quando nell'equazione che lega $y(t)$ e $y'(t)$ queste due funzioni compaiono con grado 1: dunque queste hanno la forma

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \quad \text{con } a(t) \text{ e } f(t) \text{ continue su } I \subset \mathbb{R}$$

Se $f(t)=0$ si parla di EQUAZIONE diff. lineare OMOGENEA

Altrimenti " " EQUAZIONE diff. lineare COMPLETA.

TEOREMA: L'integrale generale dell'equazione completa

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

si ottiene aggiungendo all'integrale generale della omogenea associata

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

una soluzione particolare di quella completa

STESSA SITUAZIONE CHE NEI SISTEMI LINEARI ... o della determinazione dell'integrale indefinito di una funz. cont.

La dimostrazione del teorema si compone di 2 parti: (*)

Ed 11

(I) Sia $\bar{y}(t)$ sia una soluzione di

(1) $y' + a(t)y = f(t)$: $\bar{y}'(t) = -a(t)\bar{y}(t) + f(t)$

e $z(t)$ sia una soluz. di

(2) $y' + a(t)y = 0$: $z'(t) = -a(t)z(t)$

Mostro che $y(t) = \bar{y}(t) + z(t)$ è una soluzione di (1)

Infatti

$$y'(t) = \bar{y}'(t) + z'(t) = \underbrace{-a(t)\bar{y}(t) + f(t)} \underbrace{- a(t)z(t)}$$

e quindi

$$(\bar{y}+z)'(t) + a(t)(\bar{y}+z) = f(t)$$: cioè $\bar{y}+z$ è sol. di (1)

II) Siano $\bar{y}(t)$ e $\bar{\bar{y}}(t)$ due soluzioni di

(1) $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$

mostro che $\bar{\bar{y}}(t) - \bar{y}(t)$ è soluz. di (2):

$$(\bar{\bar{y}}(t) - \bar{y}(t))' + a(t)(\bar{\bar{y}}(t) - \bar{y}(t)) =$$
$$= (\bar{\bar{y}}'(t) + a(t)\bar{\bar{y}}(t)) - (\bar{y}'(t) + a(t)\bar{y}(t)) = f(t) - f(t) = 0.$$

c.v.d.

PROBLEMI

(1°) Come si trovano le soluz. dell'omogenea?

(2°) Come trovo una sol. part.?

---

* NOTA BENE: le due parti sono la generalizzazione di quanto visto per le primitive: 1) mostro che se $F(t)$ è una primitiva di $f(t)$ e $c \in \mathbb{R}$ anche $F(t)+c$ è una primitiva di $f(t)$;
2) mostro che se $F(t)$ e $G(t)$ sono prim. di $f(t)$, allora $F(t) - G(t) = c \in \mathbb{R}$ (TEOR di LAGRANGE). Da 1) e 2) deduco che le prim. di $f(t)$ sono tutte e sole $F(t)+c$, $c \in \mathbb{R}$

Vedi Ed 11.1

(*) $\quad y' = f(t)$

è il calcolo dell'integr. indefinito di $f(t)$

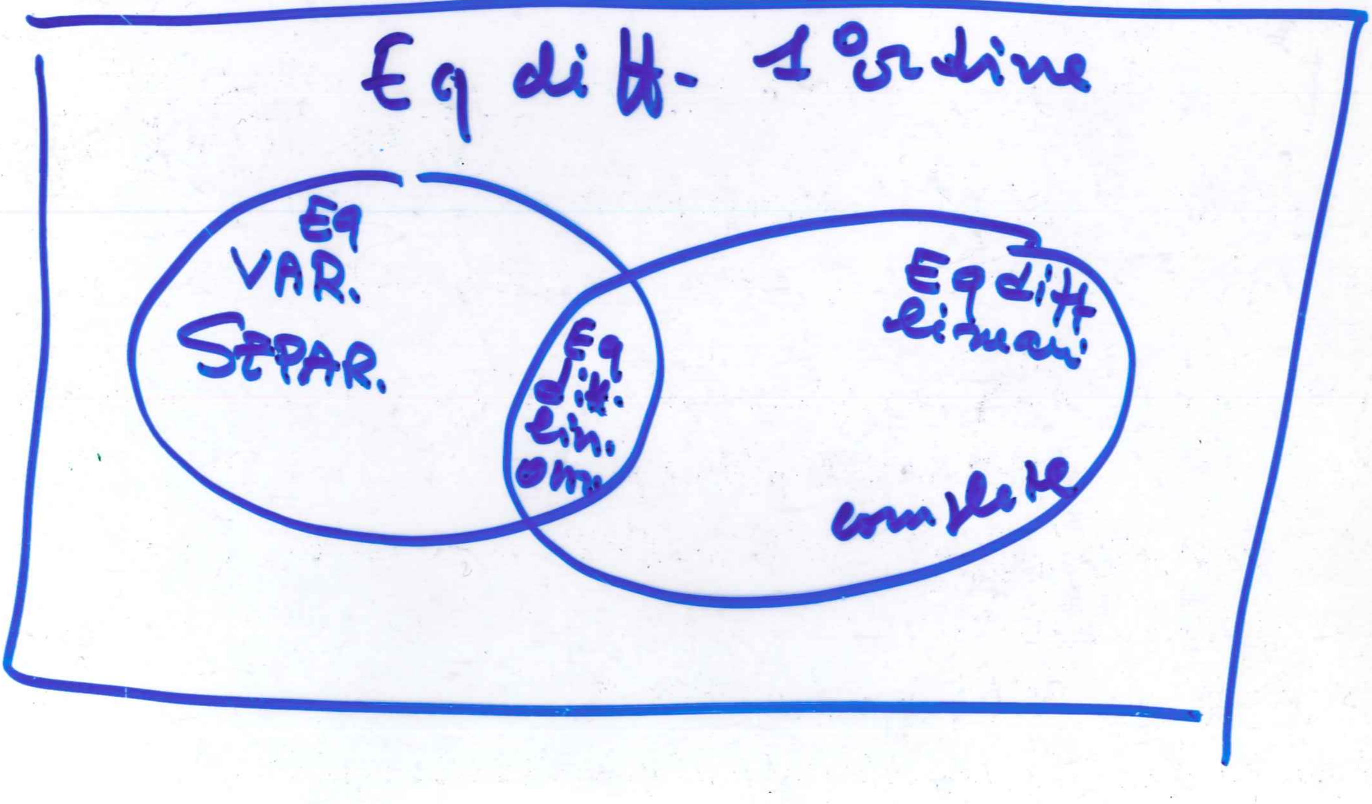
cerco una primitiva $G(t)$ di $f(t)$

Tutte e sole le sol di (*) sono quelle della forma

$$G(t) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

(ove c è una delle soluzioni di

$$z' = 0 \,)$$



Soluzione dell'equazione omogenea

$y'(t) = -a(t)\, y(t)$ è un'equazione a variabili separabili!

Ha una soluzione costante: $y(t) = 0$

mentre se $y(t) \not\equiv 0$ si ha

$\int \frac{dy}{y} = -\int a(t)\,dt$ cioè $\ln|y| = -A(t) + k$, $k \in \mathbb{R}$

($A(t)$ primitiva di $a(t)$)

cioè $y = \pm e^{k} \cdot e^{-A(t)}$ cioè $y = c\, e^{-A(t)}$ con $c \neq 0$.

Vedi commento Ed 12.1

Dando a c la possibilità di annullarsi, si rappresenta anche la soluzione costante. Quindi l'integrale generale è

$$y(t) = c\, e^{-A(t)} \qquad c \in \mathbb{R}$$

ES. Le soluzioni dell'equazione di Malthus hanno la forma $N(t) = c\, e^{\varepsilon t}$ .... CRESCITA o DECADIMENTO ESPONENZIALE.

Ricerca di una soluzione particolare

Usiamo il metodo DELLA VARIAZIONE DELLA COSTANTE, cioè cerchiamo la soluzione tra le funzioni della forma

$$\bar{y}(t) = c(t)\, e^{-A(t)}$$

ove $c(t)$ non è più costante.

$\bar{y}'(t) = (c'(t) - c(t)a(t))\, e^{-A(t)}$: quindi sostituendo nell'eq. differenziale COMPLETA devo avere

$(c'(t) - c(t)a(t))e^{-A(t)} + a(t)c(t)e^{-A(t)} = f(t)$ cioè

$c'(t)\, e^{-A(t)} = f(t)$ o anche $c'(t) = f(t)\, e^{A(t)}$

cioè $c(t)$ è una primitiva di $f(t)e^{A(t)}$: $G(t)$

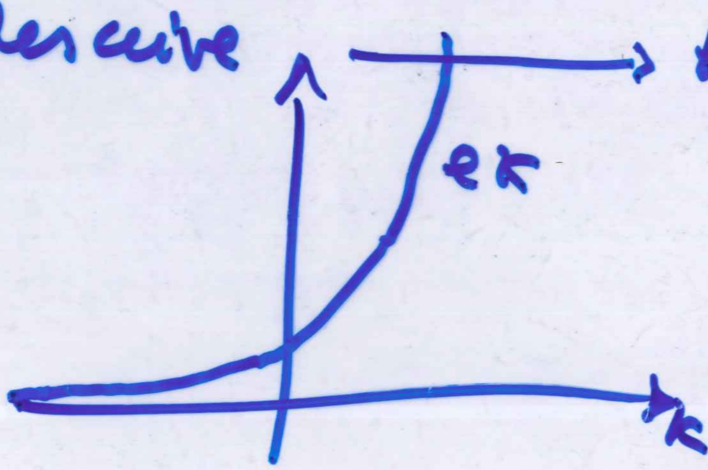
$\Rightarrow \bar{y}(t) = G(t)\, e^{-A(t)}$

Ed 12.1

$$y = \pm e^{k} \cdot e^{-A(t)}$$

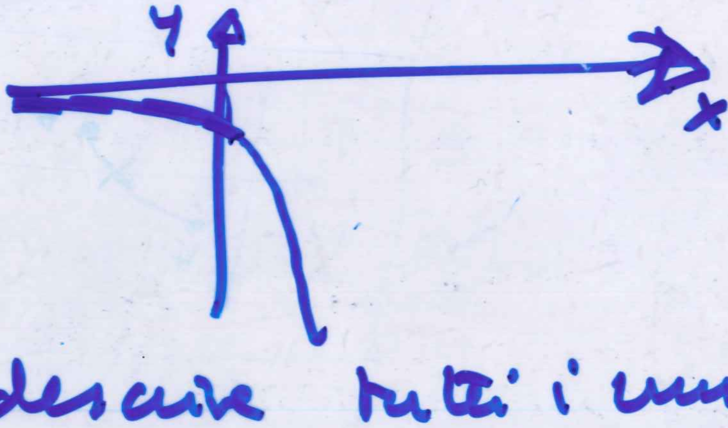
e^{k} al variare di k in $\mathbb{R}$

descrive



→ tutti i numeri reali > 0

$-e^{k}$ al variare di k in $\mathbb{R}$



descrive tutti i numeri reali < 0

$\Rightarrow$ $\pm e^{k}$ descrive tutti i numeri reali $\neq 0$: li chiamo c, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$y = c\, e^{-A(t)}$$ ← togliere limitazione $c \neq 0$

$c = 0$: $y(t) = 0$ che è sol.

Dunque l'integrale generale di

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

ha la forma

$$y(t) = \left(c + G(t)\right) e^{-A(t)}$$

ove: c varia comunque nei numeri reali
$A(t)$ è una primitiva (fissata) di $a(t)$
$G(t)$ è " " " di $f(t)\, e^{A(t)}$

Se voglio risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

basta imporre: $y(t_0) = \left(c + G(t_0)\right) e^{-A(t_0)} = y_0$, cioè
porre : $c = y_0 e^{A(t_0)} - G(t_0)$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \Big(y_0 e^{A(t_0)} + \underbrace{G(t) - G(t_0)}_{\int_{t_0}^{t} f(s) e^{A(s)}\, ds} \Big) e^{-A(t)}$$

scegliendo $A(t)$ in modo che $A(t_0) = 0$ (cioè $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$)
si perviene alla formula

$$y(t) = y_0 e^{-A(t)} + \left(\int_{t_0}^{t} f(s) e^{A(s)}\, ds \right) e^{-A(t)}$$

in cui la soluzione particolare è vista come somma della soluzione dell'omogenea associata che passa per (t_0, y_0) e di una soluzione particolare passante per $(t_0, 0)$.

Es. $a(t) = a$ costante > 0 : $y'(t) + a\,y(t) = f(t)$
Sol. omog. associata : $y(t) = c\, e^{-at}$
Integrale generale : $y(t) = \left(c + \int f(t) e^{at} dt\right) e^{-at}$
Sol. del problema di Cauchy con $y(0) = y_0$:

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \left(\int_0^t f(s) e^{as}\, ds \right) e^{-at}$$

$$= y_0 e^{-at} + \boxed{\int_0^t e^{-a(t-s)} f(s)\, ds} \longrightarrow \text{REGIME PERMANENTE}$$

$y'(t) + a\, y(t) = f(t)$

$\uparrow$ costante.

$\Rightarrow$ sol. omog. associata:

$$z' + az = 0$$

è $z(t) = c e^{-at}$

sol particolare $G(t) e^{-at}$

ove $G(t) = \int e^{at} f(t)\, dt$.

Sia $f(t)$

(I) un polinomio: questa strategia implica l'applicazione di un integrale per parti per tante volte quante è il grado.

Proviamo a evitare il conto chiedendoci se esiste una solu. che sia un polinomio dello stesso grado di $f(t)$.

Vedere prossimo esempio

Ed 13.2

$$y' + 2y = t^2 - 3t + 1$$

1) Riconoscimento:
Eq. diff. lineare completa con termine noto che è un polinomio

2) Omogenea associata: (vedi Ed. 13.3

$z' + 2z = 0$ ha per soluz. le funz. del tipo $z(t) = c\,e^{-2t}$, $c \in \mathbb{R}$

3) Soluz. particolare della completa:
cerco un polinomio di 2° grado

$$\bar{y}(t) = at^2 + bt + c$$

che sia sol. Allora sostituendo

$\bar{y}(t)$ e

$$\bar{y}'(t) = 2at + b$$

nella eq. eq. diff devo avere una identità in t.

$$2at + b + 2at^2 + 2bt + c = t^2 - 3t + 1$$

$$\Leftrightarrow (2a-1)t^2 + (2a+2b+3)t + b + c - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 2a + 2b + 3 = 0 \\ b + c - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1/2 \\ 1 + 2b + 3 = 0 \Rightarrow b = -2 \\ -2 + c - 1 = 0 \Rightarrow c = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3$$ (fare la prova!)

2) $z' = -2z$ z = 0 è soluz. di questa eq. diff. a var. separ.

$$\frac{z'}{z} = -2$$

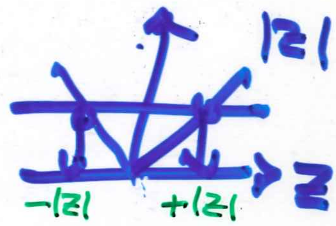
$$\int \frac{z'}{z}\,dt = \int -2\,dt$$ Osservo che:

$$\int \frac{z'(t)\,dt}{z(t)} = \int \frac{dz}{z(t)}$$ e quindi:

$$\int \frac{dz}{z} = -2t + c$$

$$\ln|z| = -2t + c$$

$$|z| = e^{-2t+c}$$



$$z = \pm e^{c} \cdot e^{-2t}$$

$$z = k e^{-2t} \qquad k \in \mathbb{R}$$

4) Conclusione:
le soluzioni di
$$y' + 2y = t^2 - 3t + 1$$
sono le funzioni del tipo
$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3 + c\,e^{-2t}$$
con $c \in \mathbb{R}$

II) supponiamo che $f(t)$ sia
$\cos bt$ (oppure $\operatorname{sen} bt$)
cioè di avere
$$y' + a y = k \cos bt \qquad k \in \mathbb{R}$$
posso cercare una sol. particolare della forma
$$\boxed{\bar{y}(t) = \alpha \cos bt + \beta \operatorname{sen} bt}$$
Allora $\bar{y}'(t) = -b\alpha \operatorname{sen} bt + b\beta \cos bt$
e sostituendo:
$$-b\alpha \operatorname{sen} bt + b\beta \cos bt + a\alpha \cos bt + a\beta \operatorname{sen} bt = k \cos bt$$
Questa è vera $\forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ sono nulli i coefficienti $a\beta - b\alpha$ di $\operatorname{sen} bt$ e $b\beta + a\alpha - k$ di $\cos bt$

Ed 13.5

Esempio: $y' + 2y = 2\cos 3t$

1) Riconosc. eq. diff. lin. complete di I ord. con termine noto del tipo $\cos bt$

2) Omog. assoc. ha sol. $z(t) = Ce^{-2t}$ con $C \in \mathbb{R}$.

3) Cerco una sol. particolare della forma

$\bar{y}(t) = \alpha \operatorname{sen} 3t + \beta \cos 3t$

Allora $\bar{y}'(t) = 3\alpha \cos 3t - 3\beta \operatorname{sen} 3t$

Sostituendo deve essere identicamente vero:

$$3\alpha \cos 3t - 3\beta \operatorname{sen} 3t + 2\alpha \operatorname{sen} 3t + 2\beta \cos 3t \equiv 2\cos 3t$$

cioè

$$(3\alpha + 2\beta - 2)\cos 3t + (2\alpha - 3\beta)\operatorname{sen} 3t \equiv 0 \quad \forall t$$

In particolare se $t = 0$ deve essere $= 0$

$(3\alpha + 2\beta - 2)\cos 0 = 0$ cioè

$\boxed{3\alpha + 2\beta - 2} = 0$

se $t = \frac{\pi}{6}$ $\quad 3t = \frac{\pi}{2}$ $\quad \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$(2\alpha - 3\beta)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0$

$\boxed{2\alpha - 3\beta} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 2 \\ 2\alpha = 3\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2}\beta \\ \left(\frac{9}{2} + 2\right)\beta = 2 \end{cases}$$

Ed 13.6

$\beta = \frac{4}{13} \qquad \alpha = \frac{6}{13}$

$\Rightarrow$ una sol parti è

$$\bar{y}(t) = \frac{6}{13}\,\text{sen}\,3t + \frac{4}{13}\cos 3t$$

fare la verifica che è soluzione!

4) L'integrale generale di

$$y' + 2y = 2\cos 3t$$

è

$$y(t) = \frac{6}{13}\,\text{sen}\,3t + \frac{4}{13}\cos 3t + c\,e^{-2t}$$

con $c \in \mathbb{R}$

III) $f(t) = k\,e^{\lambda t}$

Domani

IV) $f(t) = k\,e^{\lambda t}\cos bt$

Dato $y'(t) + a(t)\,y(t) = f(t) + g(t)$

posso calcolare l'integrale particolare sfruttando l'addizione?

Ed 13.7

Sia $y_1(t)$ una sol. di

$$y' + a(t)\,y = f(t)$$

e sia $y_2(t)$ una sol di

$$y' + a(t)\,y = g(t)$$

Allora $y_1(t) + y_2(t)$ è una sol. di

$$y' + a(t)\,y = f(t) + g(t).$$

Infatti per ipotesi

$$y_1' + a(t)\,y_1 = f(t)$$

$$y_2' + a(t)\,y_2 = g(t)$$

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2'$$

$$(y_1 + y_2)' + a(t)(y_1 + y_2) =$$

$$= y_1' + y_2' + a(t)\,y_1 + a(t)\,y_2 =$$

$$= f(t) + g(t)$$

Ed(3.8

Esempio di III : a) $y' + 2y = 5e^{2t}$

b) $y' + 2y = 5e^{-2t}$

1) Eq diff del I ord. lin complete con termine noto del tipo esponenziale

2) Omog. assoc. ! $z = ce^{-2t}$

3)(a) cerco una sol particolare del tipo $ke^{2t} = \bar{y}(t)$

Allora $\bar{y}'(t) = 2ke^{2t}$

Sostituisco

$$2ke^{2t} + 2ke^{2t} = 5e^{2t}$$

$$4k\cancel{e^{2t}} = 5\cancel{e^{2t}} \Rightarrow k = \frac{5}{4}$$

$$\bar{y}(t) = \frac{5}{4}e^{2t}$$

$\Longrightarrow$ INT. GEN: $y(t) = \frac{5}{4}e^{2t} + ce^{-2t}$.

(b) non posso più cercare una sol. del tipo ke^{-2t} poiché questa è la soluz dell'omog. associata.

$$\bar{y}(t) = k(t)e^{-2t}$$

$$\bar{y}'(t) = k'(t)e^{-2t} - 2k(t)e^{-2t}$$

$$k'e^{-2t} - \cancel{2ke^{-2t}} + \cancel{2ke^{-2t}} = 5e^{-2t}$$

$k' = 5 \Rightarrow k = 5t + c$ e posso scegliere $c=0$ basta una sol. part.!

INTEGR. GEN.: $y(t) = 5te^{-2t} + ce^{-2t}$ con $c \in \mathbb{R}$.