EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE

Hanno la forma $F(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0$.
Ogni funzione $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due volte derivabile in I e tale che

$$\forall t \in I: \quad F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)) = 0$$

si dice soluzione dell' eq. diff. di 2° ordine.

Si prova che l' integrale generale di un' eq. diff. del 2° ordine è costituito da una FAMIGLIA di funzioni dipendente da 2 parametri $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Questo è il motivo per cui per risolvere il problema di Cauchy dovremo dare 2 condizioni iniziali (VEDI il caso dell' eq. che coinvolge l'accelerazione in cui si danno spostamento e velocità iniziali).

In particolare si dicono EQ. DIFF. LINEARI del 2° ORDINE quelle della forma

$$(1) \qquad y''(t) + a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = f(t)$$

con $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ continue su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$.
Anche in questo caso, l' integrale generale dell' equazione diff. completa si ottiene sommando una soluzione particolare di (1) all' integrale generale dell' eq. diff. c. OMOGENEA ASSOCIATA

$$(2) \qquad y''(t) + a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = 0$$

Non ci sono però formule generali "belle" come nel caso del 1° ordine.

Fatti:

1) se $z_1(t)$ e $z_2(t)$ sono soluz. dell'equazione omog. anche $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lo è

Vedi Ed 14.1

2) se queste due soluzioni sono tali che $\boxed{\forall t \in I}$

WRONSKIANO $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$

allora le soluzioni dell'EQ. OMOGENEA sono (tutte e) sole quelle del tipo $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Caso particolare: $a(t) = a$ $b(t) = b$ COSTANTI

L'equazione

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0$$

ha qualche soluzione della forma e^{rt} (come succede nel caso delle lineari di 1° ordine) ?

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= e^{rt} \\ y'(t) &= r e^{rt} \\ y''(t) &= r^2 e^{rt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

la $y(t)$ è soluzione se e solo se $(r^2 + ar + b) e^{rt} = 0$ cioè se e solo se

$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$: equazione caratteristica dell'eq. differenziale

- Se $\Delta = a^2 - 4b > 0$ ci sono due radici reali distinte r_1, r_2

$z_1(t) = e^{r_1 t}$ e $z_2(t) = e^{r_2 t}$ sono tali che $\begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = e^{r_1 t} \cdot e^{r_2 t} (r_2 - r_1) \neq 0$

comunque si scelga t $\Rightarrow$ le soluzioni sono tutte e sole del tipo $c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$.

Ad es. $y''(t) - k^2 y(t) = 0$ con $k \neq 0$ ha associata l'equazione $r^2 - k^2 = 0$ che ha le radici $r = \pm k$. Allora l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea è

$$c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$$

Ed 16.1

$y'' + ay' + by = 0$

z_1 e z_2 sono soluz. $\Longleftrightarrow$

$z_1'' + a z_1' + b z_1 = 0$

$z_2'' + a z_2' + b z_2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} c_1 z_1 + c_2 z_2 \\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow$ derivata 1°: $c_1 z_1' + c_2 z_2'$

" 2°: $c_1 z_1'' + c_2 z_2''$

$c_1 z_1'' + c_2 z_2'' + a(c_1 z_1' + c_2 z_2') + b(c_1 z_1 + c_2 z_2) =$

$= c_1 (z_1'' + a z_1' + b z_1) + c_2 (z_2'' + a z_2' + b z_2) =$

$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$

ESEMPIO

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$

$y = e^{zt}$

$$z^2 e^{zt} - 3z e^{zt} + 2e^{zt} = 0$$

$$\cancel{e^{zt}} \underbrace{(z^2 - 3z + 2)}_{\text{pol. caratteristico dell'eq. diff. lin. omog del 2° ordine}} = 0$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \iff z = 1 \text{ o } z = 2$$

$\Rightarrow$ Sol. dell'eq. diff:

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$$

NOTA:

Per trovare il pol car. di

$$y'' + a y' + by = 0$$

basta sostituire a y'' : z^2

a y' : z

a y : $1 = z^0$

$$z^2 + az + b = 0$$

- Se $\Delta = a^2 - 4b < 0$ ci sono due radici complesse coniugate $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. Allora

$e^{r_1 t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t)$; $e^{r_2 t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t)$

sono due soluzioni <u>complesse</u> dell'equazione differ. omogenea .... Se le voglio reali basta prendere

$$\frac{1}{2}\left(e^{r_1 t} + e^{r_2 t}\right) = e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{e} \quad \frac{1}{2i}\left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\right) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$$

Vedi Ed.17.1

VERIFICA per la prima soluzione:

se $z(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$

$z'(t) = e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta \operatorname{sen}\beta t)$

$z''(t) = e^{\alpha t}(\alpha^2\cos\beta t - \alpha\beta \operatorname{sen}\beta t - \alpha\beta\operatorname{sen}\beta t - \beta^2 \cos\beta t)$

$$z''(t) + a\,z'(t) + b\,z(t) = e^{\alpha t}\Big(\underbrace{(\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b)}_{=0}\cos\beta t - \underbrace{(2\alpha\beta + a\beta)}_{=0}\operatorname{sen}\beta t\Big) = 0$$

infatti per ipotesi $(\alpha + i\beta)^2 + a(\alpha + i\beta) + b = 0$ cercare Re e Im

Anche qui $\begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t) & e^{\alpha t}(\alpha\operatorname{sen}\beta t + \beta\cos\beta t) \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha t} \neq 0 \ \forall t.$

vedi Ed 17.2

Dunque l'integrale generale avrà la forma:

$$c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t.$$

Da notare che posso leggere $\dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$ e $\dfrac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$ come coseno e seno di un angolo φ e posto $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ mi riconduco a

$$e^{\alpha t} A \cos(\beta t - \varphi) \qquad A, \varphi \text{ qualsiasi}$$

Ad. es. $y''(t) + k^2 y(t) = 0$ ha associata l'equazione $r^2 + k^2 = 0$ cioè $r = \pm k i$: dunque l'integrale generale ha la forma $c_1\cos kt + c_2 \operatorname{sen} kt$ o anche

$$A\cos(kt - \varphi)$$

Vedi Ed 17.3

Ed 17.1

$$e^{\alpha t + i\beta t} = \underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{funz reale}} \cdot \underbrace{e^{i\beta t}}_{\text{funzione complessa}}$$

$$= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t)$$

$$e^{\alpha t - i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i(-\beta t)} =$$

$$= e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t)$$

$$1 \cdot e^{\alpha t + i\beta t} + 1 \cdot e^{\alpha t - i\beta t} =$$

$$= e^{\alpha t}(\cos\beta t + \cancel{i \operatorname{sen}\beta t} + \cos\beta t - \cancel{i \operatorname{sen}\beta t})$$

$= 2e^{\alpha t}\cos\beta t$ è una funz reale.
Soluz della eq. diff.
lin del 2° ord omog.
con $\Delta < 0$

$$\frac{1}{2i} \cdot e^{\alpha t + i\beta t} - \frac{1}{2i} \cdot e^{\alpha t - i\beta t} =$$

$$= \frac{e^{\alpha t}}{2i}(\cancel{\cos\beta t} + i \operatorname{sen}\beta - \cancel{\cos\beta t} + i \operatorname{sen}\beta t)$$

$= \frac{2i}{2i} e^{\alpha t} \operatorname{sen}\beta t$ è un'altra sol.
reale della suddetta
equazione

Ed 17.2

Quindi se Δ di $z^2+az+b=0$ è <0 dette z_1, z_2 le 2 radici complesse coniugate prendo come sol.

$$Z_1 = e^{(\mathrm{Re}\, z_1)t} \cos[(\mathrm{Im}\, z_1)t]$$

$$Z_2 = e^{(\mathrm{Re}\, z_1)t} \operatorname{sen}[(\mathrm{Im}\, z_1)t]$$

Sono indipendenti?

$$\left| \quad \right| =$$

$$e^{2\alpha t}\left(\alpha \operatorname{sen}\beta t \cancel{\cos\beta t} + \beta(\cos\beta t)^2 + \right.$$
$$\left. - \alpha \operatorname{sen}\cancel{\beta t}\cos\beta t + \beta(\operatorname{sen}\beta t)^2\right) =$$

$$= e^{2\alpha t} \cdot \beta\left[\underbrace{(\operatorname{sen}\beta t)^2 + (\cos\beta t)^2}_{1}\right]$$

$\beta \neq 0$ perché le sol. sono compl. coniug. ($\mathrm{Im} \neq 0$)

$e^{2\alpha t} > 0$

Wronsk. $\neq 0$.

$$c_1 \cos\theta + c_2 \operatorname{sen}\theta =$$

$$\underbrace{(c_1, c_2)}_{\text{modulo 1? in generale no: } \sqrt{c_1^2+c_2^2}} \cdot \underbrace{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}_{\text{modulo 1}} =$$

$\cdot$: PRODOTTO SCALARE

$$= \frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} (c_1, c_2) \cdot (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) =$$

$$= \sqrt{c_1^2+c_2^2} \underbrace{\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}, \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \right)}_{\text{modulo 1}} \cdot (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

posso interpretare $\dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \cos\varphi$,

$$\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \operatorname{sen}\varphi$$

$$= \sqrt{c_1^2+c_2^2} \left(\cos\varphi \cos\theta + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \right) =$$

$$= \sqrt{c_1^2+c_2^2} \cdot \cos(\theta - \varphi)$$

$\sqrt{c_1^2+c_2^2} = A$ ampiezza; φ fase