Ieri: EQ. DIFF. lineari del I ordine:

$$y' + a(t)y = f(t)$$ $a(t), f(t)$ continue su un interv. $I \subseteq \mathbb{R}$.

- omog. associata: $z' + a(t)z = 0$
  Sol. $z = C e^{-A(t)}$ con $A'(t) = a(t)$
- una sol. part. della completa $\bar{y}(t)$
- Integr. generale della completa
  $y(t) = \bar{y}(t) + z(t)$ al variare di $z(t)$

$a(t) = a$ costante

III) $f = ke^{\lambda t}$

$y' + ay = e^{\lambda t}$

Sol omog. assoc. $z = Ce^{-at}$

Problema: cosa succede $\boxed{\text{se } \lambda = -a}$?

Se $\lambda \neq -a$ una soluz. particolare si cerca tra quelle del tipo $\alpha e^{\lambda t}$ ove α è un opportuno num. reale (α = incognita!)
Se $\lambda = -a$ invece, $\forall \alpha$, αe^{-at} è sol. della omogenea associata

Se $\lambda = -a$: cerco le soluz tra quelle della forma

$$\bar{y}(t) = \alpha t e^{-at}$$

Ed 13.10

IV) $f(t) = k e^{\lambda t} \cos bt$ oppure

$f(t) = k e^{\lambda t} \operatorname{sen} bt$

con $b \neq 0$. Cerco le soluzioni tra quelle della forma:

$$\bar{y}(t) = \alpha e^{\lambda t} \cos bt + \beta e^{\lambda t} \operatorname{sen} bt$$
$$= e^{\lambda t} (\alpha \cos bt + \beta \operatorname{sen} bt)$$

$$\bar{y}'(t) = e^{\lambda t} (\lambda\alpha \cos bt + \lambda\beta \operatorname{sen} bt + - b\alpha \operatorname{sen} bt + b\beta \cos bt)$$

Sostituisco in

$$y' + ay = k e^{\lambda t} \cos bt$$

$$\cancel{e^{\lambda t}} ((\lambda\alpha + b\beta) \cos bt + (\lambda\beta - b\alpha) \operatorname{sen} bt + a\alpha \cos bt + a\beta \operatorname{sen} bt) = k \cancel{e^{\lambda t}} \cos bt$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\alpha + b\beta + a\alpha - k = 0 \\ \lambda\beta - b\alpha + a\beta = 0 \end{cases}$$

sistema lineare in 2 incognite α, β

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda+a)\alpha + b\beta = k \\ -b\alpha + (\lambda+a)\beta = 0 \end{cases}$$

ORA: $\begin{vmatrix} \lambda+a & b \\ -b & \lambda+a \end{vmatrix} =$

$= (\lambda+a)^2 + b^2 > (\lambda+a)^2 \geq 0$

cioè tale determinante è $\neq 0 \Rightarrow$ garantisce l'indip. di $(\lambda+a, -b)$ e $(b, \lambda+a)$

Ed 13.11

Il sistema si riscrive

$$\begin{pmatrix} \lambda+a \\ -b \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} b \\ \lambda+a \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, visto che i due vettori $\in \mathbb{R}^2$ di cui faccio la comb. lin sono indipendenti, essi sono una base di $\mathbb{R}^2$ e quindi ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ si può scrivere IN MANIERA UNICA come loro comb. lin. In particolare il vettore $(k, 0)$

Sono sicuro (dal punto di vista teorico) che il sistema ammette 1 e 1 sola soluz $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$.

Quindi

$$\bar{y}(t) = \bar{\alpha} e^{\lambda t} \cos bt + \bar{\beta} e^{\lambda t} \operatorname{sen} bt$$

è la sol. particolare cercata

ES. Risolvere il problema di Cauchy Ed14

$$\begin{cases} y' + y \operatorname{cotg} x = 2\cos x \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

ATTENZIONE: la variabile indip. può chiamarsi t ma anche x ecc.

1°) $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ è definita e continua per $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ in intervalli del tipo $(k\pi, (k+1)\pi)$

Poiché la condizione iniziale riguarda un $x = \pi/2$ che sta nell'intervallo $(0, \pi)$, le soluzioni vanno cercate in questo intervallo

2°) sol. dell'omogenea $\underbrace{\text{associata}}_{}$ $(y' + y\operatorname{cotg} x = 0)$: $y = 0$ e:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx \quad \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\operatorname{sen} x| + c,$$

cioè posto $C = e^c$: $|y| = \dfrac{C}{|\operatorname{sen} x|} \Rightarrow y = \dfrac{k}{\operatorname{sen} x}$ $k \in \mathbb{R}$

3°) sol. particolare (per variazione delle costanti)

$$\bar{y}(x) = \frac{k(x)}{\operatorname{sen} x} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}'(x) = \frac{k'(x)\operatorname{sen} x - \cos x\, k(x)}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{k'(x)}{\operatorname{sen} x} - \frac{k(x)}{\operatorname{sen} x}\operatorname{cotg} x\right) + \frac{k(x)}{\operatorname{sen} x}\operatorname{cotg} x = 2\cos x$$

$$\Rightarrow k'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x \quad \Rightarrow \quad k(x) = \operatorname{sen}^2 x + c_1$$

e sostituendo con $c_1 = 0$ visto che mi serve solo 1 sol. particolare

$$\bar{y}(x) = \operatorname{sen} x$$

4°) integrale generale: $y = \operatorname{sen} x + \dfrac{k_1}{\operatorname{sen} x}$

5°) $y(\pi/2) = 1 + k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -1$:

$$\boxed{y(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad \text{con } x \in (0, \pi)}$$

Oppure con la formula generale:

$A(x) = \int \operatorname{cotg} x\, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + c$: $A(\pi/2) = \ln 1 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

sol. del problema, tenuto conto che in $(0, \pi)$ si ha $\operatorname{sen} x > 0$:

$$y(x) = 0 \cdot e^{-\ln(\operatorname{sen} x)} + \left(\int_{\pi/2}^{x} 2\cos s\, e^{\ln(\operatorname{sen} s)}\, ds\right) e^{-\ln(\operatorname{sen} x)}$$

$$= 0 + \left(\int_{\pi/2}^{x} 2\operatorname{sen} s \cos s\, ds\right)\frac{1}{\operatorname{sen} x} = (\operatorname{sen}^2 x - 1)\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} x}$$ come sopra.

E1|6.1

ESERCIZIO. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 3ty = t^3 \\ y(0) = 7/9 \end{cases}$$

1°) E.d. lin. I ordine completa

$a(t) = 3t \qquad f(t) = t^3$

2°) Sol. omog. associata : $z' = -3tz$

$z(t) = c\, e^{-\frac{3}{2}t^2} \qquad c \in \mathbb{R}$

3°) Metodo di variaz. delle costanti

$\bar{y} = c(t) \cdot e^{-\frac{3}{2}t^2}$

$\bar{y}' = c' \, e^{-\frac{3}{2}t^2} + c\, e^{-\frac{3}{2}t^2}(-3t)$

Sostituisco

$e^{-3/2\, t^2}\left(c' + \cancel{3ct} \cancel{+3ct}\right) = t^3$

$c' = t^3 e^{3/2\, t^2}$

$c = \int t^3 e^{3/2\, t^2} dt = \boxed{\begin{array}{c} t^2 = s \\ 2t\,dt = ds \end{array}} =$

$= \int \frac{s}{2} e^{3/2\, s} ds = \boxed{\text{per parti } \begin{array}{l} FF \; s \\ FD \; \frac{1}{2} e^{3/2\, s} ds \end{array}}$

$= s \cdot \frac{1}{3} e^{3/2\, s} - \int 1 \cdot \frac{1}{3} e^{3/2\, s} ds$

$= s \cdot \frac{1}{3} e^{3/2\, s} - \frac{2}{9} e^{3/2\, s} + k =$

$$= e^{\frac{3}{2}t^2}\left(\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}\right) + K$$

Una sol part. dell'eq diff è quindi

$$\bar{y}(t) = e^{\frac{3}{2}t^2}\left(\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}\right)e^{-\frac{3}{2}t^2} =$$

$$= \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}$$

$\Rightarrow$ sol. generale

$$y(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9} + c\,e^{-\frac{3}{2}t^2}$$

$\Rightarrow$ $y(0) = 7/9 \iff -\frac{2}{9} + c\,e^0 = \frac{7}{9}$

$$c = 1$$

Sol del probl. di Cauchy

$$y(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9} + e^{-\frac{3}{2}t^2}.$$

FINE

Avrei potuto risolvere (3°) più facilmente cercando un polinomio di grado = $gr(f(t)) - gr(a(t)) = 2$ opportuno:

$a t^2 + bt + c = \bar{y}(t)$ $\quad \bar{y}' = 2at + b$

$(2at+b) + 3t(at^2+bt+c) = t^3$ ecc....