$$y'' - y' + y = 0$$ EDL 2° ord. omog. coeff. cost

$\downarrow$

eq. caratt: $r^2 - r + 1 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$y_1 = e^{\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

$$y_2 = e^{\frac{1}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

Le soluzioni dell'EDL omog. sono

$$y(t) = e^{\frac{1}{2}t} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)\right)$$

Ed 18.2

$y'' - 2y' + y = 0$ EDL 2° ord. omog. a coeff. cost.

$\downarrow$

eq. caratt. $r^2 - 2r + 1 = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{(r-1)^2}$ cioè $\Delta = 0$

esiste 1 sola sol. distinta : $r = 1$

$\Rightarrow$ 1 sol. dell'omogenea è $e^{1 \cdot t} = e^t$

Un'altra la ottengo da questa moltiplicando per t :

$\Rightarrow$ le sol. dell'eq. diff lin om. sono

$$c_1 e^t + c_2 t e^t = (c_1 + c_2 t) e^t$$

- se $\Delta = a^2 - 4b = 0$ c'è un'unica radice (doppia) per $\boxed{z^2 + az + b = 0}$ $\rightarrow b = \frac{a^2}{4}$

$z = -a/2$. Allora una soluzione è $e^{-(\frac{a}{2})t}$.

Per trovare un'altra sol. indipendente da questa:

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI.

Cerco $z(t) = c(t)\, e^{-a/2 t}$ che sia soluzione:

$$z'(t) = \left(c'(t) - \frac{a}{2} c(t)\right) e^{-a/2 t}$$

$$z''(t) = \left(c''(t) - \frac{a}{2} c'(t) - \frac{a}{2} c'(t) + \frac{a^2}{4} c(t)\right) e^{-a/2 t}$$

e quindi sostituendo nell'eq. diff.:

$$\left(\boxed{c''(t) - a\cancel{c'(t)} + \frac{a^2}{4}\cancel{c(t)}} + a\cancel{c'(t)} - \frac{a^2}{2}\cancel{c(t)} \boxed{+\frac{a^2}{4}\cancel{c(t)}}\right) e^{-a/2 t} = 0$$

cioè

$$c''(t) = 0$$

$$c'(t) = c_1$$

$$c(t) = c_1 t + c_2$$

Quindi una seconda soluzione indipendente (*) da $e^{-a/2 t}$ è $t\, e^{-a/2 t}$ e l'integrale generale è

$$(c_1 t + c_2)\, e^{-a/2 t}$$

(*) (Verifico che anche le due soluzioni $t e^{-a/2 t}$ e $e^{-a/2 t}$ sono indipendenti:
$$\begin{vmatrix} t e^{-a/2 t} & e^{-a/2 t} \\ (1 - a/2\, t) e^{-a/2 t} & -\frac{a}{2} e^{-a/2 t} \end{vmatrix} = -e^{-at} \neq 0 \ \forall t$$)

vedi esempio p. Ed 18.2

Ricerca delle soluzioni particolari dell'equazione completa

Si può sempre cercare di usare il metodo di variazioni delle costanti. Ma quando $f(t)$ ha una forma che ricorda quella delle possibili soluzioni dell'omogenea:

polinomio ; $e^{\lambda t}$; $e^{\lambda t}\cos\omega t$ oppure $e^{\lambda t}\operatorname{sen}\omega t$

si può far di meglio.

- $f(t)$ polinomio di grado n

1) se in $y''+ay'+by=f(t)$ e $\boxed{b\neq 0}$ si cerca polinomio di grado n

2) " e $\boxed{b=0,\ a\neq 0}$ si cerca polinomio di grado $n+1$

3) " e $\boxed{b=0=a}$ si cerca polinomio di grado $n+2$

- In realtà l'ultimo caso è banale: $y''=f(t)$: si procede a una doppia integrazione
- Nel caso precedente $y''+ay'=f(t)$ si potrebbe porre $z(t)=y'(t)$ e pensare a quella data come ad un'eq. lineare del 1° ord. in $z(t)$ e poi integrare il risultato.

- Vediamo un esempio significativo:

$$y''-k^2y=1+t^2 \quad , k\neq 0$$

cerco una sol. particolare del tipo $\bar{y}(t)=c_0+c_1t+c_2t^2$

$(\Rightarrow \bar{y}'(t)=c_1+2c_2t \Rightarrow \bar{y}''(t)=2c_2)$: $2c_2-k^2(c_0+c_1t+c_2t^2)\equiv 1+t^2$

$$\Rightarrow 2c_2-k^2c_0-1-k^2c_1t-t^2(k^2c_2+1)\equiv 0 \Rightarrow \begin{array}{l} c_1=0 \\ c_2=-1/k^2 \\ c_0=\dfrac{-2/k^2-1}{k^2}=\dfrac{-(2+k^2)}{k^4}\end{array}$$

cioè una sol. particolare è

$$\frac{-(2+k^2)}{k^4}-\frac{1}{k^2}t^2$$

Soluzione generale: $-\dfrac{2+k^2}{k^4}-\dfrac{1}{k^2}t^2+c_1e^{kt}+c_2e^{-kt}$

- Esempio meno significativo: $y''+2y'=4t$ ← grado 1

cerco sol. particolare del tipo $\bar{y}(t)=c_0+c_1t+c_2t^2$ ← grado 2

cioè sostituendo $2c_2+2c_1+4c_2t=4t \Rightarrow c_2=1 \quad c_1=-c_2=-1$

c_0 arbitrario, ad es. $=0$

Sol. part. $\bar{y}(t)=-t+t^2$ — Sol. omog.: $z^2+2z=0 \Rightarrow z(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^0$

Sol. generale $y(t)=-t+t^2+c_1e^{-2t}+c_2e^0$

Se invece pongo $z(t)=y'(t)$ e risolvo $z'+2z=4t$ trovo:

1) la sol. part. $\bar{z}(t)=at+b$ è tale che $a+2at+2b=4t \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-\frac{a}{2}=-1\end{cases}$
2) l'integr. generale di $z'+2z=4t$ è $z(t)=2t-1+k_1e^{-2t}$
3) l'integr. generale di $y'(t)=2t-1+k_1e^{-2t}$ è $y(t)=t^2-t-\frac{k_1}{2}e^{-2t}+c_2$, uguale alla precedente, posto $c_1=-k_1/2$.

- $f(t) = Ae^{\lambda t}$

Cerco le sol. tra quelle della forma:

$$\bar{y}(t) = c(t)\, e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \bar{y}'(t) = \left(c'(t) + \lambda c(t)\right) e^{\lambda t} \Rightarrow \bar{y}''(t) = \left(c''(t) + 2\lambda c'(t) + \lambda^2 c(t)\right) e^{\lambda t}$$

Sostituisco nell'eq. diff.

$$\left[(c'' + 2\lambda c' + \lambda^2 c) + a(c' + \lambda c) + bc\right] \cancel{e^{\lambda t}} = A \cancel{e^{\lambda t}}$$

ove c, c', c'' sono funzioni incognite dipendenti da t

Si arriva così all'eq. diff. lin. del II ordine a coeff. cost. con termine noto "polinomiale":

$$c'' + (2\lambda + a)c' + (\lambda^2 + a\lambda + b)c = A$$

1) Se $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$

cioè λ NON È sol. dell'eq. caratteristica dell'omog. associata prendo

$$c(t) = \frac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b}$$

$\Rightarrow c'(t) = 0,\ c''(t) = 0 \Rightarrow$ sostituendo si ha una identità.

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = \frac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b} \cdot e^{\lambda t}$$

2) Se $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ma $2\lambda + a \neq 0$ prendo

cioè λ non è uno zero della derivata del polin. caratteristico z^2+az+b

$$c'(t) = \frac{A}{2\lambda + a}$$

$\Rightarrow c''(t) = 0 \Rightarrow$ sostituendo in $c'' + (2\lambda + a)c' = A$ si ha identità.

$$\Rightarrow c(t) = \frac{At}{2\lambda + a} + (\underset{0}{\overset{\shortparallel}{k_1}}) \Rightarrow \bar{y}(t) = \frac{At}{2\lambda + a} \cdot e^{\lambda t}$$

3) Se $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ e $2\lambda + a = 0$:

$$c'' = A \Rightarrow c' = At\,(+\underset{0}{\overset{\shortparallel}{k_1}}) \Rightarrow c = \frac{A}{2}t^2\,(+\underset{0}{\overset{\shortparallel}{k_1}}t + \underset{0}{\overset{\shortparallel}{k_2}})$$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = \frac{A}{2}t^2 e^{\lambda t}$$

- $f(t) = A e^{\lambda t} \cos \omega t$ e $\omega \neq 0$

  (oppure $A e^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$)

esiste una soluzione del tipo

$$\bar{y}(t) = e^{\lambda t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t) \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}?$$

Calcolando $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ e sostituendo si arriva a un sistema di questo tipo

$$\begin{cases} (\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b) c_1 + (2\lambda\omega + a\omega) c_2 = A \\ -(2\lambda\omega + a\omega) c_1 + (\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b) c_2 = 0 \end{cases}$$

vedi Ed 22.1

se $(\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b)^2 \neq -(2\lambda\omega + a\omega)^2$ esiste una e una sola coppia soluzione $(c_1, c_2) \Rightarrow$ il problema è risolto.

se $\boxed{(\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b)^2 + (2\lambda\omega + a\omega)^2 = 0}$

allora $\begin{cases} \lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b = 0 \\ \omega(2\lambda + a) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\omega \neq 0} \begin{cases} \omega^2 = \lambda^2 + a\lambda + b \\ 2\lambda + a = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -a/2 \\ \omega^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{-a^2}{2} + b = \dfrac{4b - a^2}{4} = -\dfrac{\Delta}{4} \end{cases}$$

Ricorda: Δ è il discriminante di $z^2 + az + b = 0$

Si può realizzare questa condizione solo se $\Delta < 0$

In questo caso non bastano i coeff. costanti

Ma si prova che una soluz particolare ha la forma

$$\boxed{\bar{y}(t) = k \cdot t \cdot e^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t} \quad k = \frac{A}{2\omega}$$

$$\begin{cases} \boxed{(\lambda^2-\omega^2+a\lambda+b)}c_1 + \boxed{(2\lambda\omega+a\omega)}c_2 = A \\ \boxed{-(2\lambda\omega+a\omega)}c_1 + \boxed{(\lambda^2-\omega^2+a\lambda+b)}c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha c_1 + \beta c_2 = A \\ -\beta c_1 + \alpha c_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2+\beta^2 \neq 0 \iff (\alpha,\beta) \neq (0,0)$$

$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{vmatrix} \neq 0 \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ sono indipendenti

se sono indip. ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ e in particolare $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ è rappresentabile in modo unico (c_1, c_2 unici) come comb. lin di essi:

$$\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

cioè il sistema ammette 1 e 1 sola soluz.

se $f(t) = Ae^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$, $(\omega \neq 0)$

sostituendo nell'eq. diff.

$$\bar{y}(t) = e^{\lambda t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t) \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

e le sue derivate si perviene a un sistema che differisce dal precedente solo per lo scambio dei termini noti (0 e A). Ancora la soluzione esiste ed è unica, a meno che $\begin{cases} \lambda = -a/2 \\ \Delta = -4\omega^2 \end{cases}$

In questo caso la soluz. da scegliere è

$$\bar{y}(t) = kte^{\lambda t} \cos \omega t \qquad \text{con } k = \frac{-A}{2\omega}.$$

$\boxed{\text{Operativamente}}$

Data $\quad y'' + ay' + by = Ae^{\lambda t} \cos \omega t \quad \boxed{(\omega \neq 0)}$

1°) risolvere l'omog. associata e in particolare l'equaz. caratter. $r^2 + ar + b = 0$.

2°) guardare il discriminante di tale equazione:

$$\Delta = a^2 - 4b$$

Se $\Delta > 0$ non può essere $\omega^2 = \frac{-\Delta}{4}$
Se $\omega \neq 0$ non può essere contemporaneamente $\Delta = 0$ e $\omega^2 = \frac{-\Delta}{4}$!

• Se $\Delta \geq 0$ la sol. part. dell'eq. diff. ha la forma:

$$\bar{y}(t) = e^{\lambda t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t)$$

Sostituire $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ nell'eq. diff. per ricavare c_1 e c_2 via sistema lineare di 2 eq. in c_1, c_2.

• Se $\Delta < 0$ valutare la derivata di $r^2 + ar + b$ in $r = \lambda$:

- se $2\lambda + a \neq 0$ la sol. part. è quella già segnalata al caso precedente
- se $2\lambda + a = 0$ la sol. part. dell'eq. diff. ha la forma

$$\bar{y}(t) = kte^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$$

Sostituire $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ nell'eq. diff. per trovare k.

Vale schema analogo per $y'' + ay' + by = Ae^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$.

Ed23.1

ESERCIZI

Risolvere:

$$y'' + 3y' + 2y = 2 \operatorname{sen} 4t$$

1) Riconosc.

EDL 2° ordine completa a coeff. costanti con termine noto della forma $A e^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$

($\lambda = 0$, $A = 2$, $\omega = 4$)

2) Omog associata

$$z'' + 3z' + 2z = 0$$

↳ eq carat: $r^2 + 3r + 2 = 0$

$r_1 = 1$, $r_2 = 2$ $(\Delta > 0)$

Int. generale dell'omog. è

$$c_1 e^{1 \cdot t} + c_2 e^{2 \cdot t}$$

3) La sol partic. della completa da cercare ha la forma

$$\bar{y} = k(\alpha \cos 4t + \beta \operatorname{sen} 4t)$$

Ed 23.2

$$\bar{y}' = k(-4\alpha \operatorname{sen} 4t + 4\beta \cos 4t)$$

$$\bar{y}'' = k(-16\alpha \cos 4t - 16\beta \operatorname{sen} 4t).$$

$$k(-16\alpha \cos 4t - 16\beta \operatorname{sen} 4t + 12\beta \cos 4t - 12\alpha \operatorname{sen} 4t + 2\alpha \cos 4t + 2\beta \operatorname{sen} 4t) = 2 \operatorname{sen} 4t$$

$$\begin{cases} k(-14\alpha + 12\beta) = 0 \\ k(-14\beta - 12\alpha) = 2 \end{cases} \qquad k \neq 0$$

$$\begin{cases} \cancel{14}^{\,7}\alpha = \cancel{12}^{\,6}\beta \qquad \alpha = \frac{6}{7}\beta \\ k\left(-14\beta - \frac{12 \cdot 6}{7}\beta\right) = 2 \end{cases}$$

posso pensare $k = 1$

$$\begin{cases} \alpha = 6/7\,\beta \\ \left(-14 - \frac{36}{7}\right)\beta = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 6/85 \\ \beta = 7/85 \end{cases}$$

Sol part. $\bar{y} = \frac{6}{85} \cos 4t + \frac{7}{85} \operatorname{sen} 4t$

4) Integr. generale

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + \frac{6}{85} \cos 4t + \frac{7}{85} \operatorname{sen} 4t.$$

Scrivere la sol particolare come $A \cos(4t - \varphi)$, A e φ opportuni

E123.3

Risolvere

$$y'' - 2y' + y = 2e^t \cos 3t$$

1) EDL 2° ordine a coeff. cost. completa con termine noto della forma $A e^{\lambda t} \cos \omega t$.

2) omog. assoc. $z'' - 2z' + z = 0$

$\Rightarrow$ eq. car. $\tau^2 - 2\tau + 1 = 0$

$\Delta = 0 \quad : \tau = 1$

$$z(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

3) sol. del tipo

$$\bar{y}(t) = k e^t (\alpha \cos 3t + \beta \operatorname{sen} 3t)$$

$$\bar{y}'(t) = k e^t (\alpha \cos 3t + \beta \operatorname{sen} 3t + 3\beta \cos 3t - 3\alpha \operatorname{sen} 3t)$$

$$\bar{y}''(t) = k e^t \big((\alpha + 3\beta) \cos 3t + (\beta - 3\alpha) \operatorname{sen} 3t + 3(\beta - 3\alpha) \cos 3t - 3(\alpha + 3\beta) \operatorname{sen} 3t \big) =$$

$$= k e^t \left[(-8\alpha + 6\beta) \cos 3t + (-8\beta - 6\alpha) \operatorname{sen} 3t \right] =$$

semplificando e^t dopo aver sostituito nell'eq di A. :

$$k\Big[(-8\alpha+6\beta)\cos 3t + (-8\beta-6\alpha)\,\text{sen}\, 3t +$$
$$-2(\alpha+3\beta)\cos 3t - 2(\beta-3\alpha)\,\text{sen}\, 3t +$$
$$+\alpha\cos 3t + \beta\,\text{sen}\, 3t\Big] = 2\cos 3t$$

$$k\Big[(-9\alpha+0\beta)\cos 3t + (-9\beta+0\alpha)\,\text{sen}\, 3t\Big] = 2\cos 3t$$

$$\begin{cases} k(-9\alpha) = 2 \\ k(-9\beta) = 0 \end{cases} \qquad k=1 \quad \beta = 0 \quad \alpha = -\frac{2}{9}$$

Sol particolare

$$\bar{y}(t) = -\frac{2}{9} e^t \cos 3t$$

4) Integrale generale

$$y(t) = -\frac{2}{9} e^t \cos 3t + c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Riconoscere e risolvere

$$y'' + 3y' - 4y = 2e^t \cos 3t$$

$$r^2 + 3r - 4 = 0 \qquad \Delta > 0 \ldots$$

A CASA PER ESERCIZIO.

Ed 23.5

$y'' + 2y' + 3y = 3e^{-t}\cos\sqrt{2}t$

1) EDL 2° ord. coeff. cost. completa termine noto $Ae^{\lambda t}\cos\omega t$

2) omog. assoc. $z'' + 2z' + 3z = 0$

$\Rightarrow$ eq caratteristica $\tau^2 + 2\tau + 3 = 0$

$$\tau_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm \sqrt{2}\,i$$

integr. generale dell'omogenea è

$$z(t) = e^{-t}\left(c_1\cos(\sqrt{2}t) + c_2\,\text{sen}(\sqrt{2}t)\right)$$

3) Le sol. della completa <u>non</u> possono essere della forma

$$e^{-t}\left(\alpha\cos(\sqrt{2}t) + \beta\,\text{sen}(\sqrt{2}t)\right)$$

perché queste sono TUTTE (e sole) le sol. della omogenea.

Allora devo prendere una sol del tipo

$$\bar{y}(t) = K e^{-t}\, t\, \text{sen}\sqrt{2}t.$$

per esercizio calcolare le derivate 1ª e 2ª e sostituire nell'eq. differenziale, determinando K