RIEPILOGO

Eq. diff. del 2° ordine lineari a coeff costanti

$$(*) \qquad y'' + ay' + by = f(t)$$

$f(t)$ continua su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$

a, b costanti

Per risolverla devo sommare una sol. particolare dell'equazione completa $(*)$ con le soluzioni dell'omogenea associata:

$$z'' + az' + bz = 0$$

$\downarrow$ associare l'eq. caratteristica

$$r^2 + ar + b = 0$$

3 CASI:

$\Delta > 0$: 2 sol. reali distinte r_1, r_2 e tutte le sol dell'omogenea hanno la forma

$$z(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad , \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\Delta < 0$: $r_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} \in \mathbb{C}$ con $\Delta = a^2 - 4b$

$$= \underbrace{-\frac{a}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}}_{\beta} \sqrt{-1} = \alpha \pm \beta \sqrt{-1}$$

$$z(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t)$$

$\Delta = 0$: 1 sola sol. reale : $r = -\frac{a}{2}$

$$z(t) = c_1 e^{-\frac{a}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{a}{2}t} =$$

$$= e^{-\frac{a}{2}t}(c_1 + c_2 t)$$

Poi passo a esaminare le <u>soluzioni particolari</u> in dipendenza da $f(t)$

per trovare una sol. della completa la cerco tra funzioni "SIMILI" al termine noto

1) $f(t)$ polinomio di grado n

cerco la soluz. nei polinomi

- di grado n : $\bar{y}(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

  solo se $b \neq 0$

- di grado $n+1$: se $b=0$ e $a \neq 0$
- di grado $n+2$: se $b=0=a$

in questi due casi l'eq. diff. ha forma

$y'' + ay' = f(t)$ → sost. $x(t)=y'(t)$, $x'(t)=y''(t)$

$y'' = f(t)$ → calcolo successivamente due primitive

2) $f(t) = A e^{\lambda t} \cos \omega t$ oppure $f(t) = A e^{\lambda t} \sin \omega t$

$\boxed{\omega=0}$ $Ae^{\lambda t}$

$\boxed{\lambda=0}$ $A \cos \omega t$

$\boxed{\lambda=0}$ $A \sin \omega t$

Vedi pagine successive

3) $f(t)$ = somma di 2 o più dei casi precedenti

$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

Cerco una soluzione particolare per le eq. diff. :

$y'' + ay' + by = f_1(t)$: $\bar{y}(t)$

$y'' + ay' + by = f_2(t)$: $\bar{\bar{y}}(t)$

$\bar{y} + \bar{\bar{y}}$ è soluzione di $y'' + ay' + by = f_1(t) + f_2(t)$? Sì

$(\bar{y}'' + a\bar{y}' + b\bar{y}) + (\bar{\bar{y}}'' + a\bar{\bar{y}}' + b\bar{\bar{y}}) = f_1(t) + f_2(t)$

ATTENZIONE:

non è importante ricordare i coefficienti che entrano in gioco nelle 3 soluzioni, bensì che ci sono 3 casi e che in dipendenza da essi si devono scegliere le sol. particolari.

OPERATIVAMENTE

data la $y'' + ay' + by = Ae^{\lambda t}$

1°) risolvere l'omogenea associata e in particolare l'equazione caratteristica:

(*) $r^2 + ar + b = 0$

2°) controllare se λ è soluzione dell'eq. (*)

- SE LA RISPOSTA È NO la sol. part. ha la forma
$$\bar{y}(t) = ke^{\lambda t}$$
- SE LA RISPOSTA È SÌ, controllare se λ è soluzione di
$$(r^2+ar+b)' = 0 \quad \text{cioè di } 2r+a=0$$
  - SE LA RISPOSTA È NO la sol. part. ha la forma
$$\bar{y}(t) = kte^{\lambda t}$$
  - SE LA RISPOSTA È SÌ la sol part. ha la forma
$$\bar{y}(t) = kt^2e^{\lambda t}$$

3°) in base alle risposte ottenute - e alle corrispondenti forme di sol. part. $\bar{y}(t)$ trovate - sostituire $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ nell'eq. diff. e trovare il valore di k.

Se si sceglie una forma sbagliata per difetto di potenza ($kt^ie^{\lambda t}$ invece di $kt^je^{\lambda t}$ con $j>i$) l'equazione che proviene da (3°) non ha soluzione; se è sbagliata per eccesso di potenza, la stessa equazione non è un'identità in t.