

Eq. diff. del 2° ordine lineari a coeff costanti

$$(*) \quad y'' + ay' + by = f(t)$$

$f(t)$  continua in un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$

$a, b$  costanti

Per risolverla devo sommare una sol. particolare dell'equazione completa (\*) con le soluzioni dell'omogenea associata:

$$z'' + az' + bz = 0$$

↓ associa l'eq. caratteristica

$$\kappa^2 + a\kappa + b = 0$$

**3 CASI:**

$\Delta > 0$  : 2 sol. reali distinte  $\kappa_1, \kappa_2$  e tutte le sol. dell'omogenea hanno la forma

$$z(t) = c_1 e^{\kappa_1 t} + c_2 e^{\kappa_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\Delta < 0$  :  $\kappa_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} \in \mathbb{C}$  con  $\Delta = a^2 - 4b$

$$= \left[ \frac{-a}{2} \right] \pm \left[ \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right] \sqrt{-1} = \alpha \pm \beta \sqrt{-1}$$

$$z(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

$\Delta = 0$  : 1 sola sol. reale :  $\kappa = -\frac{a}{2}$

$$\begin{aligned} z(t) &= c_1 e^{-\frac{a}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{a}{2}t} = \\ &= e^{-\frac{a}{2}t} (c_1 + c_2 t) \end{aligned}$$

Poi passo a esaminare le soluzioni particolari, in dipendenza da  $f(t)$



per trovare una sol. della completa la cerco tra funzioni "SIMILI" al termine noto

1)  $f(t)$  polinomio di grado  $n$

cerco le soluz. nei polinomi

• di grado  $n$  :  $\bar{y}(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

solo se  $b \neq 0$

• di grado  $n+1$  : se  $b=0$  e  $a \neq 0$

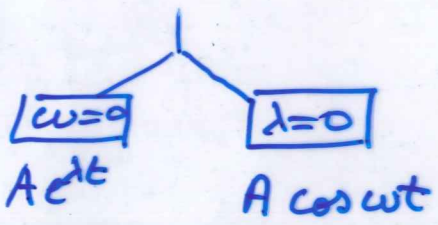
• di grado  $n+2$  : se  $b=0=a$

in questi due casi l'eq. diff. ha forma

$y'' + ay' = f(t) \rightarrow$  sost.  $x(t) = y'(t), x'(t) = y''(t)$

$y'' = f(t) \rightarrow$  calcolo successivamente due primitive

2)  $f(t) = A e^{\lambda t} \cos \omega t$  oppure  $f(t) = A e^{\lambda t} \sin \omega t$



$\lambda=0$   
 $A \sin \omega t$

Vedi pagine successive

3)  $f(t) =$  somma di 2 o più dei casi precedenti

$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

Cerco una soluzione particolare per le eq. diff :

$y'' + ay' + by = f_1(t) \quad : \bar{y}(t)$

$y'' + ay' + by = f_2(t) \quad : \bar{\bar{y}}(t)$

$\bar{y} + \bar{\bar{y}}$  è soluzione di  $y'' + ay' + by = f_1(t) + f_2(t)$  ? Sì

$(\bar{y}'' + a\bar{y}' + b\bar{y}) + (\bar{\bar{y}}'' + a\bar{\bar{y}}' + b\bar{\bar{y}}) = f_1(t) + f_2(t)$

## ATTENZIONE:

non è importante ricordare i coefficienti che entrano in gioco nelle 3 soluzioni, bensì che ci sono 3 casi e che in dipendenza da essi si devono scegliere le sol. particolari.

## OPERATIVAMENTE

dato la  $y'' + ay' + by = Ae^{\lambda t}$

1°) risolvere l'omogenea associata e in particolare l'equazione caratteristica:

$$(*) \quad r^2 + ar + b = 0$$

2°) controllare se  $\lambda$  è soluzione dell'eq. (\*)

- SE LA RISPOSTA È NO la sol. part. ha la forma

$$\bar{y}(t) = k e^{\lambda t}$$

- SE LA RISPOSTA È SÌ, controllare se  $\lambda$  è soluzione di

$$(r^2 + ar + b)' = 0 \quad \text{cioè di } 2r + a = 0$$

- SE LA RISPOSTA È NO la sol. part. ha la forma

$$\bar{y}(t) = kt e^{\lambda t}$$

- SE LA RISPOSTA È SÌ la sol part. ha la forma

$$\bar{y}(t) = kt^2 e^{\lambda t}$$

3°) in base alle risposte ottenute - e alle corrispondenti forme di sol. part.  $\bar{y}(t)$  trovate - sostituire  $\bar{y}$ ,  $\bar{y}'$ ,  $\bar{y}''$  nell'eq. diff. e trovare il valore di  $k$ .

Se si sceglie una forma sbagliata per difetto di potenza ( $kt^i e^{\lambda t}$  invece di  $kt^j e^{\lambda t}$  con  $j > i$ ) l'equazione che proviene da (3°) non ha soluzione; se è sbagliata per eccesso di potenza, la stessa equazione non è un'identità in  $t$ .