$$y'' + 2y' + 3y = 3e^{-t}\cos\sqrt{2}\,t \qquad (*)$$

1°) EDL 2° ordine, a coeff. cost. con termine noto della forma $k e^{\lambda t}\cos\omega t$

2°) Sol. dell'omog. assoc.: $z(t) = c_1 e^{-t}\cos\sqrt{2}t + c_2 e^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t$

(poiché la caratteristica ha sol. $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}i$)

3°) Sol. part. della completa del tipo $\boxed{k e^{-t}\cdot t\cdot \operatorname{sen}\sqrt{2}t = \bar{y}(t)}$

$\Rightarrow \bar{y}'(t) = k e^{-t}\left(-t\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}t\cos\sqrt{2}t\right) =$

$= k e^{-t}\left((1-t)\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}t\cos(\sqrt{2}t)\right)$

$\Rightarrow \bar{y}''(t) = k e^{-t}\big((t-1)\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}t\cos(\sqrt{2}t) +$ ← derivata di e^{-t} · 2° fattore

$- \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}(1-t)\cos(\sqrt{2}t) +$ ← derivata 1° addendo · e^{-t}

$- 2t\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\big) =$ ← " 2° " · e^{-t}

$= k e^{-t}\left((-2-t)\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}(2-2t)\cos\sqrt{2}t\right)$

Sostituzione in $(*)$

$k\cancel{e^{-t}}\big[(-2-t)\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}(2-2t)\cos(\sqrt{2}t) +$ ← $y'' +$

$+ (2-2t)\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}(2t)\cos(\sqrt{2}t) +$ ← $2y' +$

$+ 3t\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)\big] = 3\cancel{e^{-t}}\cos(\sqrt{2}t)$ ← $3y = f(t)$

$\Rightarrow k(\cancel{-2}-\cancel{t}+\cancel{2}-\cancel{2t}+\cancel{3t})\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + k\cdot\sqrt{2}(2-\cancel{2t}+\cancel{2t})\cos(\sqrt{2}t) = 3\cos(\sqrt{2}t)$

$\Rightarrow k\,2\sqrt{2}\cos(\cancel{\sqrt{2}t}) = 3\cos(\cancel{\sqrt{2}t}) \qquad \Rightarrow k = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \bar{y}(t) = \frac{3}{2\sqrt{2}} e^{-t}\cdot t\cdot\operatorname{sen}(\sqrt{2}t).$

4°) Integrale generale: $y(t) = \frac{3}{2\sqrt{2}} e^{-t} t\cdot\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + e^{-t}\left(c_1\cos(\sqrt{2}t) + c_2\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)\right).$

3°) Più facile e meno a rischio conti: $\boxed{\bar{y} = e^{-t}c(t)} \Rightarrow y' = e^{-t}(c' - c) \Rightarrow$

$\bar{y}'' = e^{-t}(c'' - 2c' + c)$. Sostituisco:

$\cancel{e^{-t}}(c'' - \cancel{2c'} + c + \cancel{2c'} - 2c + 3c) = 3\cancel{e^{-t}}\cos(\sqrt{2}t) \quad \Rightarrow \boxed{c'' + 2c = 3\cos\sqrt{2}t}$

Eq caratteristica $z^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow$ sol omog: $k_1\cos\sqrt{2}t + k_2\operatorname{sen}\sqrt{2}t \Rightarrow$ sol particolare della completa della forma:

$\boxed{\bar{c}(t) = k\,t\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)} \Rightarrow \bar{c}' = k\left(\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}t\cos(\sqrt{2}t)\right) \Rightarrow$

$\bar{c}''(t) = k\left(-2t\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + 2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\right)$

Sostituisco:

$k\left(-2t\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + 2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) + 2t\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)\right) = 3\cos\sqrt{2}t$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}k = 3 \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

E quindi $\bar{y}(t) = \frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot t\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)\cdot e^{-t}$

Oppure

30) Col metodo di variazione delle costanti (vedi pagina successiva)

$$y(t) = c_1(t)\underbrace{e^{-t}\cos\sqrt{2}t}_{z_1} + c_2(t)\underbrace{e^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t}_{z_2}$$

$$\begin{cases} c_1'(t) = \dfrac{-z_2 \cdot 3e^{-t}\cos\sqrt{2}t}{z_1 z_2' - z_1' z_2} \\[2ex] c_2'(t) = \dfrac{z_1 \cdot 3e^{-t}\cos\sqrt{2}t}{z_1 z_2' - z_1' z_2} \end{cases}$$

$$z_1' = e^{-t}(-\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t)$$

$$z_2' = e^{-t}(-\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t)$$

$$z_1 z_2' - z_2 z_1' = e^{-2t}\Big(\cancel{-\cos\sqrt{2}t\operatorname{sen}\sqrt{2}t} - \sqrt{2}(\operatorname{sen}\sqrt{2}t)^2 + \cancel{+\cos\sqrt{2}t\operatorname{sen}\sqrt{2}t} - \sqrt{2}(\cos\sqrt{2}t)^2\Big) =$$

$$= e^{-2t}(-\sqrt{2})$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} c_1'(t) = \dfrac{-3e^{-t}\cdot e^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t\cos\sqrt{2}t}{-\sqrt{2}e^{-2t}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\sqrt{2}t\cos\sqrt{2}t = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\operatorname{sen}(2\sqrt{2}t) \\[2ex] c_2'(t) = \dfrac{3e^{-t}\cos\sqrt{2}t \cdot e^{-t}\cos\sqrt{2}t}{-\sqrt{2}e^{-2t}} = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2}t)^2 = \dfrac{-3}{2\sqrt{2}}(\cos(2\sqrt{2}t) - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1(t) = \dfrac{-3}{(2\sqrt{2})^2}\cos(2\sqrt{2}t) \\[2ex] c_2(t) = -\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{sen}(2\sqrt{2}t) - t\right) \end{cases}$$

$$y(t) = e^{-t}\left(-\frac{3}{8}\cos(2\sqrt{2}t)\cos(\sqrt{2}t) - \frac{3}{8}\operatorname{sen}(2\sqrt{2}t)\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \frac{3}{2\sqrt{2}}t\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)\right) =$$

$$= e^{-t}\left(-\frac{3}{8}\cos(2\sqrt{2}t - \sqrt{2}t) + \frac{3}{2\sqrt{2}}t\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)\right) =$$

$$= e^{-t}\left(-\frac{3}{8}\cos(\sqrt{2}t) + \frac{3}{2\sqrt{2}}t\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)\right)$$

Metodo di variazione delle costanti per EDL 2° ordine a coeff. costanti

Sia $y'' + ay' + by = f(t)$ l'eq. in oggetto.

Siano $z_1(t)$ e $z_2(t)$ due soluzioni "indipendenti nel senso del Wronskiano $\neq 0$" dell'EDL omogenea associata: $z'' + az' + bz = 0$.

Si ha allora:

(1) $$z_i'' = -a z_i' - b z_i .$$

Per variazione delle costanti, suppongo che una sol. dell'EDL completa sia della forma
$$\bar{y}(t) = c_1(t) z_1(t) + c_2(t) z_2(t)$$

Allora
$$\bar{y}'(t) = \sum_{i=1,2} (c_i' z_i + c_i z_i')$$
$$\bar{y}''(t) = \sum_{i=1,2} (c_i'' z_i + 2c_i' z_i' + c_i z_i'') \underset{\text{per(1)}}{=} \sum_{i=1,2} \left((c_i'' - bc_i) z_i + (2c_i' - ac_i) z_i' \right)$$

Sostituisco nell'EDL completa:
$$\sum_{i=1,2} \left[(c_i'' - \cancel{bc_i}) z_i + (2c_i' - \cancel{ac_i}) z_i' + a c_i' z_i + \cancel{a c_i z_i'} + \cancel{b c_i z_i} \right] = f(t)$$
cioè

(2) $$\sum_{i=1,2} \left[c_i'' z_i + c_i' (2 z_i' + a z_i) \right] = f(t)$$

Poiché cerco solo una soluzione particolare, faccio un'ipotesi di comodo

(3) $$\boxed{\sum_{i=1,2} c_i' z_i = 0}$$

per cui la (2) diventa

(4) $$\sum_{i=1,2} (c_i'' z_i + 2 c_i' z_i') = f(t)$$

Inoltre derivando la (3) ho

(5) $$\sum_{i=1,2} c_i'' z_i = - \sum_{i=1,2} c_i' z_i'$$

e sostituendo in (4)

(6) $$\boxed{\sum_{i=1,2} c_i' z_i' = f(t)}$$

La (3) e la (6) danno luogo a un sistema per la ricerca delle soluzioni:
$$\begin{cases} c_1' z_1 + c_2' z_2 = 0 \\ c_1' z_1' + c_2' z_2' = f(t) \end{cases}$$
che è certamente risolubile poiché per ipotesi il wronskiano $\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} = z_1 z_2' - z_2 z_1'$ è $\neq 0 \ \forall t$.

Le soluzioni sono
$$\boxed{\begin{cases} c_1' = \dfrac{-z_2 f(t)}{z_1 z_2' - z_2 z_1'} \\[2ex] c_2' = \dfrac{z_1 f(t)}{z_1 z_2' - z_2 z_1'} \end{cases}}$$

di qui mediante calcolo delle due primitive $c_1(t)$ e $c_2(t)$ e sostituzione in
$$\bar{y}(t) = c_1(t) z_1(t) + c_2(t) z_2(t)$$
si ha la soluzione particolare